



**AGRICULTURAL RESEARCH INSTITUTE**  
**PUSA**





# MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX





**MEMOIRES**  
DE LA SOCIÉTÉ  
**DES SCIENCES**  
**PHYSIQUES ET NATURELLES**  
**DE BORDEAUX**

6<sup>e</sup> SÉRIE

---

TOME II

---

**PARIS**  
**GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE**  
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES  
Quai des Augustins, 55

**A BORDEAUX**  
**CHEZ FERET ET FILS, LIBRAIRES**  
15, cours de l'Intendance, 15

—  
1902



*Arnulf*

**NOTICE**  
**SUR LA VIE ET LES TRAVAUX**  
**DE**  
**GEORGES BRUNEL**  
(1856-1900)

**Par P. DUHEM**

PROFESSEUR DE PHYSIQUE THÉORIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

**PREMIÈRE PARTIE**

**LA VIE**

J'étais depuis quelques jours élève de l'École Normale, lorsqu'on me présenta à l'« archicube » Brunel. De cette brève entrevue, une image très nette m'était restée : sous le feutre aux larges bords, une tête semblable à celle que les peintres de la Renaissance donnaient volontiers au Christ; derrière l'inséparable binocle, un regard clair et droit; les lèvres entr'ouvertes par un sourire qui disait la bonté; une main vigoureuse et loyalement tendue.

Douze ans plus tard, à peine arrivé à la Faculté des Sciences de Bordeaux, je revis ce regard, ce sourire; je retrouvai cette cordiale poignée de main qu'accompagnaient ces mots : « Me reconnaissez-vous ? »

Certes, je le reconnaissais, comme l'eussent reconnu tous ses camarades d'École, tous ses compagnons de jeunesse; sur cette belle tête, les cheveux pouvaient se clairsemier, la barbe se mêler de fils d'argent; mais les ans, en apportant à Brunel des charges et des honneurs, étaient impuissants à modifier sa droiture et sa simplicité; essentiellement, il était l'homme que le cours de la vie ne fait pas dévier; et, dans ce que nous content aujourd'hui ceux qui ont été les témoins de son enfance, dans les souvenirs qu'ils ont gardés du petit collégien

d'Abbeville, nous retrouvons avec émotion le germe de toutes les qualités dont nous avons admiré les fruits chez le doyen de la Faculté des Sciences de Bordeaux (1).

## I

Georges-Édouard-Auguste Brunel est né à Abbeville le 17 septembre 1856.

Il était fils et petit-fils de maîtres menuisiers. Son grand-père, qui s'était chargé de son éducation, le destinait à l'état où lui-même excellait; aussi, tout en l'envoyant à une école primaire libre, sise chaussée Marcadé et tenue par M. Grognet, lui avait-il acheté un petit établi et des outils pour son apprentissage. Cet établi ne fut pas sans influence sur l'éducation de Brunel; il y acquit une habileté manuelle imprévue chez un mathématicien; il y acquit surtout l'habitude de voir les choses dans l'espace, sous une forme concrète, et cette habitude resta l'une des marques essentielles de son intelligence.

L'établi, cependant, n'était pas sa vocation. Le grand-père était menuisier, mais son esprit ne trouvait pas pleine et entière satisfaction dans l'habile manœuvre de la gouge ou du rabot; il avait formé une collection d'outils curieux, qu'il montrait avec fierté; il possédait des livres, des ouvrages sur la charpente, les *Mémoires* de l'Académie des Sciences depuis le XVIII<sup>e</sup> siècle; il recevait les *Comptes Rendus*. La bibliothèque du grand-père devint l'asile préféré du jeune apprenti; aux heures que ses camarades consacraient à jouer, on le trouvait au milieu d'un tas de livres. Sa raison était d'ailleurs si parfaitement organisée que ces lectures disparates, remplies d'obscurités impénétrables à l'esprit d'un enfant, capables de jeter le trouble et l'incohérence dans une tête moins bien équilibrée, déposaient en la sienne des assises scientifiques nettes, régulières et solides. Aussi, M. Grognet vint-il un jour dire aux parents de l'apprenti — celui-ci avait alors onze ans —: « Il est inutile que votre enfant revienne à l'école; je n'ai plus rien à lui apprendre. »

(1) M<sup>me</sup> Ternisien-Brunel, sœur de notre ami; M. Appell, professeur à la Faculté des Sciences de Paris; M. Barchhausen, professeur à la Faculté de Droit de Bordeaux; M. Chaudron, secrétaire de l'Université de Bordeaux; M. Élie, professeur au Collège d'Abbeville; M. Joannis, professeur à la Faculté des Sciences de Paris; M. Leblond, professeur à l'École des officiers torpilleurs; M. Molk, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy, et M. Pionchon, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble, m'ont secondé de leurs souvenirs. Qu'ils reçoivent ici les témoignages de ma vive gratitude.

On se décida à mettre le jeune menuisier au collège d'Abbeville. Il entra en huitième, bien âgé pour une telle classe; au bout de l'année, il était hors concours; l'année suivante, il enleva les deux classes de septième et de sixième; il poursuivit sa route à cette allure redoublée, en sorte qu'il arriva en philosophie à l'âge où y parvenaient ceux de ses camarades qui, dès l'enfance, avaient fait des études classiques. Le baccalauréat ès lettres conquis à la fin de l'année, il prépara le baccalauréat ès sciences, pendant les vacances, presque sans aide; au bout de trois mois, il était prêt. « En quinze jours, me dit un de ses maîtres, il avait appris à manier la trigonométrie. Malheureusement, le principal ne voulut pas le présenter; il ressentit le coup, mais, avec son endurance habituelle des choses, il ne regimba pas. Il y gagna d'être reçu au bout de l'année *avec toutes blanches*, comme on disait alors, et, je crois, exonération des frais. »

Ses camarades ne mettaient pas en doute sa supériorité, aussi bien dans les études que dans les jeux, mais vivaient avec lui sur le pied de l'égalité la plus parfaite. D'ailleurs, il ne venait pas à l'esprit de Brunel de tirer vanité de cette supériorité reconnue; mais il se faisait un plaisir d'aider les plus faibles en leur donnant des conseils et en les instruisant.

On comprend les sentiments d'affection que gardaient à Brunel ceux qui s'étaient assis avec lui sur les bancs de ce collège, fier aujourd'hui de porter le nom de Courbet; on comprend les regrets qu'ils ont manifestés lorsqu'ils ont appris la mort de leur ancien condisciple.

Brunel, lui aussi, aimait son collège et tous ceux, maîtres ou élèves, qu'il y avait connus; mais, parmi eux, il en est un qui tenait en son cœur une place de choix : c'est le professeur qui, depuis près de trente ans, y enseigne les sciences physiques et naturelles.

J'aimerais à dire ici quelle dialectique aiguisée dans la critique des théories physiques, quel clair bon sens dans les choses de la vie, enfin quelle droiture et quelle sûreté dans les relations amicales caractérisent M. Élie; mais, lorsqu'il lira ces lignes consacrées au plus cher de ses élèves, sa modestie se troublerait; il me reprocherait d'avoir détourné vers le maître une part de l'éloge destiné au disciple; aussi est-ce à celui-ci que je laisserai la parole et me bornerai-je à transcrire ces mots qu'il adressait un jour au « père Élie », au nom de ses anciens élèves :

« Je ne saurais rappeler ce que vous doit chacun de nous. Chacun de nous le sait; vous seul l'avez certainement oublié. L'honneur de l'Université est de posséder des maîtres tels que vous, dévoués à leur tâche et ignorants de leurs mérites, savants utiles et désintéressés qui se font une joie de se dépenser pour les autres. »

M. Élie avait assurément beaucoup donné à Brunel. Dès qu'il l'eut connu, en quatrième, il fut frappé de l'érudition déjà très grande que le jeune collégien avait acquise en feuilletant les livres de son grand-père; comme aucun préparateur n'était attaché à la chaire de sciences physiques et naturelles, il le chargea des expériences utiles à cet enseignement; une continuelle communion d'idées s'établit entre le maître et l'élève et, certainement, celui-ci ressentit à un très haut degré l'influence de celui-là; on ne peut parcourir les écrits du physicien d'Abbeville et ceux du géomètre de Bordeaux sans discerner entre eux une indéfinissable, mais incontestable parenté.

Si Brunel dut beaucoup à M. Élie, il n'oublia jamais sa dette et ne perdit aucune occasion de s'acquitter. Chaque année, pendant les vacances, il passait un mois à Abbeville, auprès des siens; pendant ce temps, il ne manquait pas un seul jour de rendre visite à son ancien maître.

Devenu professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, il obligea M. Élie à surmonter l'excessive défiance de soi qui, trop souvent, l'empêchait de publier ses travaux; il le décida à se servir de l'un d'eux pour conquérir le doctorat, et, en juin 1892, notre Faculté vit une émouvante soutenance: le candidat, qui avait dédié sa thèse à son ancien élève, devenu son juge, put s'imaginer un instant que le temps avait rétrogradé, prendre la table où siégeait la commission d'examen pour un banc de la classe d'Abbeville, et répondre à une objection: « Attendez, Brunel, je vous expliquerai cela tout à l'heure! »

Lorsque, le 3 octobre 1897, on fêta à Abbeville le jubilé de M. Élie, ses anciens élèves chargèrent Brunel de porter la parole au nom de tous. Ils n'eussent pu, assurément, choisir un disciple plus cher au maître, ni auquel le maître fût plus cher.

En octobre 1875, Brunel obtint une bourse qui lui permit de faire, au Lycée de Lille, une classe de mathématiques spéciales. Parmi ses nouveaux camarades étaient M. Leblond, qu'il devait retrouver à l'École Normale, et M. Carpentier, aujourd'hui capitaine d'artillerie;

il se lia particulièrement avec celui-ci, dont le père était professeur au Lycée de Lille; il le conseilla et le guida dans ses études avec le bon sens et l'autorité précoces qui, déjà, le caractérisaient; la divergence des carrières sépara bientôt les deux amis, mais ils se retrouvaient pendant les vacances que Brunel venait passer dans les Ardennes, à Montcy-Notre-Dame, chez les parents de M. Carpentier; quelques années plus tard, M<sup>lle</sup> Marie Carpentier devenait la compagne aimée et dévouée de celui qu'une maladie foudroyante devait arracher, le 24 juillet 1900, à son affection, à la tendresse de leurs deux filles.

A la fin de sa première année de mathématiques spéciales, Brunel fut reçu à l'École Polytechnique, mais ce succès ne satisfit point sa légitime ambition. Il démissionna. Demandé par le proviseur du Lycée Saint-Louis, il vint à Paris étudier une seconde fois les mathématiques spéciales. Malgré une fièvre typhoïde intense qui, heureusement, ne laissa pas de trace, il se trouva à la fin de l'année scolaire debout pour la lutte, et l'un des champions les plus redoutés des lycées de Paris. A l'École Polytechnique, il fut reçu troisième; à l'École Normale, il obtint le second rang; le premier avait été enlevé par M. Georges Humbert, aujourd'hui membre de l'Institut et professeur d'analyse à l'École Polytechnique; n'avoir été vaincu que par un tel émule passa, à bon droit, pour une victoire. M. Humbert ayant opté pour l'École Polytechnique, Brunel entra, en 1877, à l'École Normale comme chef de la section scientifique.

## II

A l'École Normale, pendant trois ans, Brunel fut pour ses camarades, mais plus pleinement, ce qu'il avait été à Abbeville, à Lille, au Lycée Saint-Louis : une sorte de frère aîné, très sensé, très dévoué, très bon et un peu bourru. « L'affection que j'avais pour lui, m'écrivit un de ceux qui l'ont le mieux connu, il la retrouvait chez tous ses camarades de section. Quand je me reporte à ces années heureuses, ce qui me frappe le plus, c'est l'ascendant extraordinaire qu'il avait pris sur nous tous. Je le vois encore dépensant son temps sans compter pour aider l'un de nous à résoudre quelque difficulté et fournir l'explication claire et décisive, mais aussi gourmandant sévèrement les défaillances et les découragements. Brunel fut notre chef



de section, au sens propre du mot. Et nul ne songeait à se soustraire à son influence si marquée; tous la subissaient avec bonheur, sûrs de trouver au moment utile le bon conseil, l'encouragement affectueux; tous acceptaient ses reproches, malgré leur forme parfois un peu rude, car on sentait qu'ils venaient du cœur. »

D'ailleurs, il était toujours prêt à prendre la défense de ses camarades auprès de l'autorité, à détourner sur lui les foudres, heureusement bénignes, dont ils étaient menacés. « Dès qu'une bêtise quelconque avait été faite, me dit l'un d'eux, il se mettait en avant, même — je devrais dire surtout — lorsqu'il n'y avait pas pris part; comme s'il voulait s'excuser de ne s'être pas trouvé au milieu de nous en un pareil moment. »

L'agrégation franchie, il reçut une mission pour étudier auprès d'une université allemande. Pareille mission était alors chose nouvelle. Depuis ce temps, nombre de nos camarades sont allés compléter, au pied des chaires de F. Klein, de Schwartz ou de Sophus Lie, les études mathématiques qu'ils avaient ébauchées aux conférences de la rue d'Ulm; ils suivaient l'exemple de Brunel. Celui-ci se rendit à Leipzig, où l'attirait l'enseignement de Félix Klein.

Parmi les étudiants qui entouraient le brillant analyste, sa franchise et sa bonne humeur lui attirèrent bientôt toutes les sympathies, dont quelques-unes se transformèrent en solides et durables amitiés et dont le souvenir n'est point encore effacé en la grande Université saxonne.

Un fait montrera quel ascendant, là comme partout, il exerçait sur ses condisciples.

Le président d'un « Verein » d'étudiants vint un jour le prier de prendre part à un « Commers ». On connaît ces longues beuveries dont la bière, la pipe et les chœurs font tous les frais. Parmi les chants qui exaltent le « Vaterland », il en est, hélas! qu'un Français ne peut entendre sans un brisement de cœur; Brunel le fit observer; mais tout avait été prévu; connaissant les devoirs de l'hospitalité, le bureau du « Verein » avait sévèrement proscrit ce qui pouvait blesser les sentiments de l'invité.

La consigne avait été rigoureusement tenue, lorsqu'un étudiant qui avait laissé au fond d'une dernière chope l'esprit de discipline dont se piquent les « Verein », entonna un des hymnes interdits. Sans mot dire, Brunel se leva et sortit.

Il n'était pas loin que deux étudiants, délégués par le président, le

rejoignaient; ils lui apportaient des excuses et le priaient de rentrer au « Commers », lui annonçant que le délinquant en avait été expulsé et rayé du « Verein ». Si cette mesure sévère fut rapportée par la suite, ce fut sur les instances de Brunel.

Malgré les égards que lui témoignaient ses condisciples, la pensée de la patrie venait parfois étreindre douloureusement son cœur, le seul cœur français qui battît à l'Université de Leipzig. Alors, pour en trouver un qui résonnât à l'unisson du sien, il se rendait à Berlin, où M. Molk, aujourd'hui professeur à la Faculté des Sciences de Nancy, suivait les enseignements de Weierstrass et de Kronecker. « Un soir, me conte M. Molk, il avait été pris d'un ardent désir de parler français avec un Français, de ne plus voir les visages étrangers dont il était entouré depuis plusieurs mois; aussitôt il prend l'express et tombe chez moi après minuit; je dormais à poings fermés; il fait un vacarme assourdissant; je lui ouvre, et nous voilà passant une bonne partie de la nuit à parler de la France en buvant force tasses de thé. »

Ces causeries avec M. Molk roulaient souvent sur les différences entre l'École de Berlin, où Weierstrass et surtout Kronecker poussaient jusqu'à la minutie les rigoureuses précautions de la méthode déductive, et l'École de Leipzig, où Félix Klein prônait l'intuition, fille de l'imagination et mère des découvertes fécondes. Ainsi germait en Brunel l'idée que, pour être vraiment vivante dans un pays, la science n'y doit pas être uniforme, qu'elle grandit et se fortifie par les disputes entre Écoles adverses; ainsi se préparait l'apôtre convaincu de la décentralisation intellectuelle, que nous avons vu à l'œuvre.

A son retour en France, Brunel est, pendant un an (1881-1882), agrégé-préparateur de mathématiques à l'École Normale, puis (1882-1884) chargé du cours de mécanique à l'École des Sciences d'Alger; le 4 juillet 1883, il soutient sa thèse de doctorat intitulée : *Étude sur les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques de genre troisième*; enfin, le 27 octobre 1884, il vient, comme chargé du cours de mathématiques pures, occuper à Bordeaux la chaire de Hoüel.

Âgé et malade, Hoüel venait de quitter la Faculté des Sciences de Bordeaux sur laquelle son enseignement et ses travaux avaient, pendant de longues années, jeté un vif éclat. Bien loin de chercher à rompre, comme il arrive trop souvent, avec les traditions de son prédécesseur, le nouveau chargé de cours s'efforça de les prolonger; il rendait à Hoüel de fréquentes visites, en cette ancienne tour du télé-

graphe où le géomètre retraité avait établi sa bibliothèque; là, en de longs entretiens, le jeune professeur faisait profiter son érudition, déjà très vaste, des connaissances inépuisables du vieux mathématicien; il explorait avec lui cette bibliothèque, riche d'ouvrages rarissimes sur les mathématiques, et qui devait un jour, grâce à ses efforts, accroître le fonds de l'Université bordelaise; il se pénétrait des pensées de celui qui avait fait connaître Lobatchewsky et Bolyai, qui avait apporté à la construction des tables de logarithmes des perfectionnements précieux. De ce commerce intellectuel, on retrouve la vive impression en lisant l'admirable *Notice sur l'influence scientifique de Guillaume-Jules Hoüel* que Brunel publia dans les *Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux*; pieux hommage rendu au souvenir de celui dont il recueillait l'héritage universitaire.

D'ailleurs, cet hommage rendu, sa piété filiale à l'égard du grand géomètre de Bordeaux ne se tient pas quitte; elle ne perd aucune occasion de s'affirmer; elle découvre avec joie, dans la correspondance de Hamilton, des lettres où l'illustre Écossais s'applaudit des thèses de Hoüel, développement des méthodes, encore méconnues, que Hamilton avait inaugurées en mécanique analytique; et cette joie, elle la fait partager à la *Société des Sciences* <sup>(1)</sup>.

Le 30 décembre 1886, la chaire de Mathématiques pures de la Faculté des Sciences avait été transformée en chaire de Calcul infinitésimal et Brunel avait été nommé titulaire de cette chaire. Le 19 novembre 1887, le doyen proposait au ministre de promouvoir son jeune collègue de la quatrième classe à la troisième, bien qu'il fût titulaire depuis un an à peine. « Les professeurs de quatrième classe, disait M. Lespiault, sont actuellement en très petit nombre et ils n'y restent que peu de temps. » — Que les temps sont changés! — Et M. Lespiault ajoutait: « M. Brunel a des titres tout à fait exceptionnels. C'est un très éminent et très savant professeur, ayant une grande autorité sur ses élèves, toujours prêt à faire les leçons complémentaires qui peuvent leur être utiles... » La promotion demandée ne fut cependant accordée que le 28 décembre 1890.

En novembre 1893, les collègues de Brunel l'envoyèrent siéger au Conseil général des Facultés; le 9 décembre de la même année, le

<sup>(1)</sup> *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, séance du 22 janvier 1891.*

ministre de l'Instruction publique le nomma assesseur du Doyen; le 24 novembre 1896, le suffrage de ses pairs l'éleva au Décanat; vice-président du Conseil de l'Université pour l'année 1898, il se trouva chargé pendant trois mois, par suite du décès de M. Couat, des fonctions de Recteur; enfin, peu de mois avant sa mort, la Faculté des Sciences dut procéder au renouvellement des fonctions décanales; dans l'urne, on ne trouva qu'un bulletin qui ne portât pas le nom de Brunel; il va sans dire que c'était le sien.

### III

C'est à la Faculté des Sciences de Bordeaux, dans ses fonctions de professeur et de doyen, que Brunel put faire apprécier de tous ses qualités intellectuelles et morales. Je voudrais essayer de rendre ici, aussi exactement que possible, la figure très particulière, très personnelle de ces qualités.

La plupart des Français, surtout des Français cultivés, ne possèdent point à un haut degré cette forme imaginative qui permet de voir d'une vue immédiate et simultanée, clairement et distinctement, les nombreux détails d'un ensemble très compliqué: pour saisir et comprendre, il leur faut simplifier, élaguer, abstraire, déduire, classer; de là une certaine impuissance à se figurer les choses telles qu'elles sont, car ce qui est concret est toujours infiniment complexe; de là, le goût de l'ordre, même artificiel, de la simplicité, même aux dépens de la vérité; de là, un fâcheux penchant à remplacer la réalité vivante et touffue par la formule sèche et vide.

En l'esprit de Brunel, il n'y a pas trace de cette faiblesse; il possède une extraordinaire aptitude à se rendre présents tous les détails de l'organisme le plus compliqué. « Vous pensez à la manière d'un Anglais, » lui disais-je parfois, et il souscrivait volontiers à ce jugement. M. Élie qui a pu, de bonne heure, constater cette aptitude chez le collégien d'Abbeville, l'attribue en partie à l'éducation première, à l'apprentissage de menuisier: « Il a dû y acquérir, me dit-il, l'habileté et le goût pour les mécanismes que vous avez sans doute reconnus chez lui. Il voyait toujours les  $x$  à travers les formes réelles. »

Cette puissance imaginative a pour corollaire nécessaire une merveilleuse mémoire. Dès l'enfance, cette faculté frappe ses maîtres. « Sa mémoire était extraordinaire, écrit M. Élie. Bien que je négligeasse à dessein les énumérations de mots bizarres, je me rappelle des compositions d'histoire naturelle qu'on eût pu croire copiées, tant les classifications, avec leurs noms baroques, y étaient exactement reproduites. »

Ce qui se grave si aisément dans son souvenir, ce ne sont pas des mots, des formules, des fantômes vidés de tout contenu réel ; ce sont les choses mêmes, concrètes et vivantes. Au cours d'une promenade, il reconnaît et nomme plantes et insectes. Lorsqu'un de ses collègues recourt à son inépuisable érudition, que prodigue une inlassable obligeance, il ne se contente pas de lui indiquer l'existence d'un écrit intéressant ; il dit dans quel volume se trouve cet écrit, quelle est la couleur de la reliure et, de son cabinet, il indique avec précision la travée de la bibliothèque où le livre est déposé.

Avec de telles facultés, il eût évidemment excellé soit dans les sciences de mécanismes, comme la physique expérimentale, soit dans les sciences de faits, comme l'histoire naturelle. Il a choisi les mathématiques ; mais ses recherches mathématiques ont une figure très personnelle que modèlera la forme particulière de son esprit.

Nous voudrions essayer de tracer une esquisse fidèle qui fit revivre cette physionomie si caractérisée prise en Brunel par l'intuition des vérités géométriques.

Ceux dont les efforts intellectuels ont contribué à l'accroissement des sciences exactes, se groupent naturellement en deux partis dont Pascal a donné les marques <sup>(1)</sup> :

« Diverses sortes de sens droit, dit-il ; les uns, dans un certain ordre de choses, et non dans les autres ordres, où ils extravaguent. Les uns tirent bien les conséquences de peu de principes, et c'est une droiture de sens. Les autres tirent bien les conséquences des choses où il y a beaucoup de principes. Par exemple, les uns comprennent bien les effets de l'eau, en quoi il y a peu de principes ; mais les conséquences en sont si fines, qu'il n'y a qu'une extrême droiture d'esprit qui y puisse aller ; et ceux-là ne seraient peut-être pas grands géomètres, parce que la géométrie comprend un grand nombre de principes, et qu'une

(1) PASCAL, *Pensées*, édition Havet, art. VII, 2.

nature d'esprit peut être telle qu'elle puisse pénétrer peu de principes jusqu'au fond et qu'elle ne puisse pénétrer le moins du monde les choses où il y a beaucoup de principes.

» Il y a donc deux sortes d'esprits : l'une, de pénétrer vivement et profondément les conséquences des principes, et c'est là l'esprit de justesse; l'autre, de comprendre un grand nombre de principes sans les confondre, et c'est là l'esprit de géométrie. L'un est force et droiture d'esprit, l'autre est amplitude d'esprit. »

Cette amplitude d'esprit, qui permet au géomètre ou à l'algébriste de combiner, sans les embrouiller ni les confondre, les propositions innombrables et les symboles variés, ne diffère pas essentiellement de la faculté par laquelle un mécanicien exercé distingue tous les rouages de la machine la plus compliquée et en perçoit l'agencement. Elle marque la vigueur d'une imagination qui d'une seule vue, claire et détaillée, saisit une multitude d'objets divers. C'est aussi cette vigueur et cette netteté d'imagination qui rendent présents à l'administrateur, à l'homme d'État, toutes les affaires qu'il doit traiter, tous les hommes qu'il doit gouverner. C'est elle encore qui permet à certains joueurs de faire manœuvrer la tour et le cavalier sur trois échiquiers à la fois sans regarder les parties. Ceux qui sont doués de cette faculté sont aptes également à voir les choses concrètes sous leurs aspects infiniment variés et à combiner des symboles ou des fictions suivant les règles les plus compliquées. L'amplitude d'esprit se complaît en la multiplicité des combinaisons, comme la force et la droiture d'esprit en la profondeur des abstractions et en la rigueur des déductions.

Cette aptitude à imaginer en même temps, dans tous leurs détails, un grand nombre d'objets, est particulièrement développée chez les Anglais; elle marque à son coin la littérature, la législation, la politique de la Grande-Bretagne; aux œuvres de ses géomètres et de ses physiciens, elle imprime un caractère ineffaçable.

Moins habile à imaginer qu'à déduire, le mathématicien français aime à tirer les conséquences profondes et cachées de principes simples et peu nombreux; les formules algébriques lui plaisent, car elles condensent à l'extrême une longue suite de propositions; leur généralité, l'aisance avec laquelle elles s'enchaînent les unes aux autres par des règles très sûres, satisfont son amour de l'ordre et de la simplicité; mais ces formules, il les veut courtes; il a en horreur

les longs calculs; il méprise la qualité de calculateur, car on méprise toujours les qualités que l'on n'a pas.

Naturellement, il s'attache aux parties des mathématiques qui se développent par des méthodes propres à satisfaire ses goûts; les doctrines en vogue, les théories préférées de l'École de géomètres qui jette sur l'enseignement français un si vif éclat, sont toutes marquées au coin de cette élégante simplicité.

Naturellement aussi, il délaisse volontiers les branches qui exigent de pénibles analyses ou de longues opérations, celles où le raisonnement ne se peut traduire dans le langage de l'algèbre, celles où les résultats ne se laissent pas exprimer par des formules, parce que chaque nombre entier y garde les caractères qui le distinguent de tous les autres et qui lui font une sorte de personnalité; telles sont certaines parties de la théorie des nombres ou de l'analyse combinatoire; seuls, quelques esprits d'une rare puissance osent s'y consacrer, au mépris de la mode, et, par des chefs-d'œuvre comme le *Traité des Substitutions*, prouver que les mathématiques ne doivent pas être toujours simples ni toujours élégantes.

Parmi ces chapitres de la science mathématique dont la forme déplaît à l'algébriste français, il en est cependant dont l'utilité, dont la nécessité sont incontestables; telle l'*analysis situs*, dont Leibniz déplorait déjà l'état d'abandon. Les problèmes qui relèvent de cette discipline surgissent des points les plus divers de la science; le juriste les rencontre lorsqu'il veut apprécier les relations de parenté; le logicien, lorsqu'il cherche à analyser la méthode déductive; le chimiste, lorsqu'il veut énumérer tous les isomères possibles d'un corps dont il connaît la composition; le mécanicien les retrouve dans la théorie des tourbillons hydrodynamiques; le physicien y est conduit par l'étude des courants électriques, et l'algébriste, qui les voudrait fuir, s'y heurte à chaque tournant de ses recherches.

« De toutes les théories mathématiques (sans en excepter les premiers livres de géométrie), il n'en est pas de plus élémentaire, de plus immédiatement accessible que celle-là, dit M. Hadamard <sup>(1)</sup>. Lui dénierait-on ce caractère uniquement en raison de son importance même et parce qu'elle est mêlée à la solution des problèmes les plus élevés que la science mathématique ait à se poser? »

(1) J. HADAMARD, *Leçons de géométrie élémentaire*, t. II, p. VII.

*L'analysis situs*, en effet, use de notions simples à ce point qu'un esprit juste les pourrait saisir presque sans étude préalable; mais elle les soumet à des combinaisons si variées et si compliquées qu'un esprit très ample peut seul en distinguer tous les cas, sans confusion ni omission. Aussi cette science est-elle en honneur en Angleterre, où les Kirkman, les Cayley, les Tait l'ont développée et accrue, tandis qu'elle demeure presque inconnue en France, malgré les profondes recherches de celui que Brunel nommait le plus puissant géomètre de ce temps, de M. C. Jordan.

Ces questions qui exigent des calculs longs et compliqués, ces problèmes dont la solution ne s'obtient pas par l'enchaînement d'une suite de propositions toutes simples, mais par l'intuition directe d'un nombre immense d'éléments, sollicitaient naturellement la puissance imaginative de Brunel, comme l'effort tente les muscles de l'athlète. C'est aux problèmes de cet ordre, particulièrement à ceux qui relèvent de *l'analysis situs*, qu'il a consacré son activité scientifique incessante.

Il excellait surtout dans les questions où un grand nombre de cas possibles doivent être dénombrés et classés; *l'énumération*, procédé si scabreux, si sujet à erreur pour la plupart des mathématiciens, était sa méthode de prédilection. « La méthode de Brunel, me disait un jour un de ses collègues, doué au suprême degré de l'esprit de déduction, c'est l'art de compter sur les doigts élevé à la plus haute puissance. »

Sa force imaginative lui rendait aisée la construction des signes et le maniement des algorithmes qui devaient résoudre un problème; l'emploi de calculs symboliques était un de ses instruments préférés; mais, tandis qu'il se livrait à ce jeu de signes et de fictions, son goût des choses concrètes ne disparaissait pas; il lui devait sa constante tendance à démontrer la possibilité d'une solution en la formant; il lui devait aussi l'habitude de réaliser en des objets visibles et maniables les résultats obtenus, de faire appel dans ce but non seulement aux traits et aux ombres, mais au talent de la brodeuse ou à l'art du menuisier.

L'habitude de voir les choses telles qu'elles sont, et non pas au travers de formules et de symboles, lui rendait parfois des services signalés. Je n'en veux citer qu'un exemple. Un algébriste illustre avait énoncé cette proposition d'*analysis situs* : Toutes les surfaces fermées



sont des surfaces à deux côtés. Quelques jours après la publication du mémoire qui la renfermait, Brunel prouva à la Société des Sciences de Bordeaux que cette proposition était fausse; il ne se contenta pas de le démontrer, il construisit des modèles de surfaces fermées à un seul côté. L'algébriste, au lieu de fixer son intuition sur les surfaces mêmes, avait raisonné sur les équations qui les représentent; entre la réalité et le symbole existait un hiatus par où le paralogisme s'était glissé.

Non seulement l'amplitude d'esprit rend aisée la construction des symboles propres à représenter une classe déterminée d'objets; non seulement elle garde, simultanément présents à l'imagination, les signes et les réalités signifiées, en sorte que le passage des uns aux autres est prompt et sûr; mais encore elle rapproche les problèmes, souvent très différents, que peut traduire un même symbolisme algébrique; elle saisit les analogies qui rendent ces problèmes exprimables par les mêmes formules et qui, selon le langage des Anglais, font de chacun d'eux un *modèle* propre à *illustrer* les autres.

Ces transpositions continuelles entre questions essentiellement différentes qui, sans les confondre, les éclairent l'une par l'autre, étaient familières à Brunel; elles dessinaient un trait caractéristique de sa manière de penser.

Tandis qu'il était préparateur à l'École normale, un de ses camarades, reçu quelques années après lui, M. G. Kœnigs, poursuivait de belles et profondes recherches sur la géométrie de l'espace réglé. Brunel avait reconnu que la considération de la droite comme élément générateur de l'espace à trois dimensions, équivalait algébriquement à l'étude des variétés linéaires que l'on peut former en un espace gauche à quatre dimensions et du second ordre, tracé lui-même dans un espace fondamental à cinq dimensions; aussitôt que M. Kœnigs lui communiquait l'énoncé de quelque théorème nouveau de géométrie réglée, Brunel le transposait et en obtenait ainsi une claire intuition.

La forme intellectuelle qui différenciait si profondément Brunel de la plupart des mathématiciens français ne se manifestait pas seulement par la nature des problèmes qu'il traitait et des méthodes qu'il employait à les résoudre; elle se traduisait encore par un autre caractère: il possédait, sur la plupart des branches des mathématiques, une érudition admirable d'étendue et de précision. A l'imitation de Houël,

son prédécesseur, il ne dédaignait point de produire des écrits nourris de cette érudition. Telles sont la *Monographie de la fonction Gamma* et la *Notice sur l'influence de G.-J. Hoüel*, qu'il publia dans les premières années de son séjour à Bordeaux; tel est encore le fascicule sur les intégrales définies qu'il donna à l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*.

Il devait produire, dans le même recueil, une bibliographie raisonnée de l'*analysis situs* et, aussitôt après, composer un traité complet de cette science dont il avait médité et étendu toutes les parties. Le plan commun de ces deux écrits était arrêté, les matériaux en étaient réunis et classés; mais, hélas! la mort est venue au moment même où il allait en tracer les premières lignes. La perte est grande pour les mathématiciens qui eussent enfin trouvé, réunis en un traité didactique, les fragments de cette science dont la dispersion défie aujourd'hui toute étude.

La perte est grande aussi pour la gloire de notre ami. Les questions qui sollicitaient ses méditations n'étaient point à la mode; bien qu'il fût à la fois très utile et très difficile de les résoudre, elles n'étaient point propres à faire briller celui qui les résolvait; Brunel le savait et il ne s'efforçait point de réagir là contre; au contraire, son extrême désintéressement semblait heureux que ses écrits passassent presque inaperçus; il ne faisait rien pour attirer sur eux l'attention; il les publiait — je devrais dire les dissimulait — presque tous dans les mémoires de notre modeste Société des Sciences de Bordeaux. Aussi, suis-je certain que son traité d'*analysis situs* eût été, pour beaucoup de géomètres, une surprise, la révélation d'un talent vigoureux et inconnu. C'est avec un dur serrement de cœur qu'après avoir feuilleté ses papiers, examiné les dernières reliques de son travail, j'ai dû renoncer à l'espoir d'en trouver le manuscrit.

On n'aurait pas une idée complète de l'activité scientifique de Brunel si l'on tenait compte de ses seuls travaux et si l'on omettait l'aide qu'il apportait sans cesse aux travaux d'autrui. « Il était l'obligeance même, m'écrivit un de ses collègues; cette obligeance n'attendait même pas d'être sollicitée pour se manifester, mais s'offrait spontanément avec une simplicité, une bonne grâce, un empressement dont on était ravi. Que de recherches bibliographiques, par exemple, n'a-t-il pas rendues faciles et fécondes par son active collaboration et sa grande érudition! »

C'est aux mathématiciens surtout qu'il pouvait fournir d'utiles renseignements, grâce à ses immenses lectures et, aussi, grâce à son intelligence des théories de l'*analysis situs*, si nécessaires et si souvent ignorées. C'est ainsi qu'au bas d'un des plus beaux mémoires de M. Hadamard, je relève cette note : « Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. Brunel que sa connaissance profonde de cette partie de la science a mis à même de me fournir une aide précieuse. » Nous aurons plus loin à revenir sur cette féconde collaboration.

Mais Brunel ne s'intéressait pas seulement aux mathématiques ; au Collège d'Abbeville, au Lycée Saint-Louis, à l'École Normale, il avait étudié avec une égale ardeur la physique, la chimie, l'histoire naturelle. « Sa largeur d'esprit était telle, m'écrivait mon prédécesseur à Bordeaux, M. Pionchon, que toutes les formes de l'activité scientifique éveillaient sa curiosité et retenaient sa sympathique attention. Il se plaisait à passer de longues heures dans les divers laboratoires de la Faculté, à assister aux diverses phases des recherches qu'il y voyait entreprendre. Il se réjouissait des succès de l'expérimentateur comme s'ils lui eussent été personnels, et son inaltérable bonne humeur était un précieux réconfort aux heures des difficultés et du découragement. » Et M. Joannis, qui fut son camarade au Lycée Saint-Louis et à l'École Normale avant d'être son collègue à Bordeaux, me dit : « Il passait la plupart de ses après-midi dans nos laboratoires, allant de l'histoire naturelle à la physique, sans oublier, à ma grande joie, ce malheureux sous-sol, pourtant bien peu attrayant, où son amitié venait me tenir compagnie et où, tout en fumant des cigarettes, il m'aidait souvent dans mes expériences. »

#### IV

Son extraordinaire puissance à voir à la fois l'ensemble et les moindres détails de l'objet le plus complexe le disposait singulièrement aux besognes administratives ; et, de fait, il y excellait. Ceux qui l'entouraient n'avaient pas tardé à s'en apercevoir ; ils profitèrent de toutes les occasions pour mettre à contribution son aptitude aux affaires.

En 1896, M. Rayet, alors doyen de la Faculté des Sciences de Bordeaux, demandait au ministre de l'Instruction publique la croix

de chevalier de la Légion d'honneur pour M. Brunel; en cette demande, qui n'aboutit jamais, je lis : « Dans les jours qui ont précédé l'ouverture de la dernière exposition universelle de Bordeaux, organisée par la Société Philomathique, alors que les commissions avaient peine à arrêter leurs résolutions et qu'il était nécessaire de brusquer les décisions, M. Brunel a fait preuve d'une activité et d'une énergie rares. La Faculté des Sciences doit à son dévouement une très grande partie du succès qu'elle a obtenu à l'exposition.

» S'il y a une justice, M. Brunel devrait recevoir une des croix de chevalier qui sont accordées en faveur de l'exposition. »

Il était passé maître en l'art de débrouiller les complications juridiques et financières qui régissent l'enseignement supérieur; secondée par l'expérience du dévoué secrétaire de l'Université de Bordeaux, M. Chaudron, son habileté en ces questions épineuses rendait les plus grands services.

A peine entré au Conseil général des Facultés, il avait été nommé rapporteur de la commission des finances; il garda cette fonction jusqu'à sa mort. Des soins qu'il apportait à s'en acquitter, un souvenir m'est resté, bien propre à montrer comment il prévoyait toutes les conséquences possibles du moindre détail.

A l'examen du budget d'une Faculté, il relevait une erreur : une recette de 35 centimes avait été portée à un chapitre où elle ne devait pas figurer. Comme on le félicitait, avec quelque ironie, de sa minutieuse exactitude, il expliqua au Conseil que la transposition commise pouvait créer un précédent, être érigée en principe, être appliquée au budget entier de l'Université; que la rétribution de l'agent comptable serait, par là, modifiée et le revenu annuel de l'Université de Bordeaux diminué de 750) francs. Les compliments reprirent, mais l'ironie s'était évanouie.

Brunel disait un jour à M. Élie : « Les idées sont peut-être plus faciles à manier que les hommes. » Pour être administrateur, il ne suffit pas de manier des idées, de manier des règlements et des chiffres; il faut encore manier des hommes. Brunel s'y entendait.

Bien des causes concouraient à cette aptitude; il en est une sur laquelle il faut insister, sous peine de ne point tracer de lui un portrait fidèle; je veux parler de l'indifférence absolue qu'il professait à l'égard des conventions sociales.

Elle sautait aux yeux, cette indifférence, dans les détails de sa mise.

Peut-être quelques-uns s'étonneront-ils de me voir rappeler ce qu'ils regardent comme un travers; je suis sûr, cependant, que la plupart de ses amis m'en voudraient d'omettre ce trait de sa physionomie, faute duquel ils ne le reconnaîtraient plus. Aussi bien, les lettres où ils ont enfermé leurs souvenirs émus pour me les transmettre font plus d'une allusion à ces insouciances de costume; l'une me parle du chapeau légendaire qu'il portait en Allemagne, « un vieux chapeau qu'aucun de ses camarades ne lui eût fait changer pour un empire; » l'autre, venue d'Abbeville, me dit : « On se le rappelle dans notre quartier, pêchant tous les matins à la ligne, en redingote et chapeau à haute forme. » Ils sont légion ceux qui, pour juger un homme, comptent les reflets de son couvre-chef; Brunel attachait plus de prix à ce que renferme le chef.

« Lorsque vous toisez un homme, disait Montaigne, vous lui comptez la hauteur de ses patins. » Au conseil de revision, pour avoir sa taille exacte, on le déchausse. Ainsi faisait Brunel. Celui qu'il voulait juger, il le dépouillait de tout ce que les habitudes, les formules, les conventions, la fortune lui avaient donné de « grandeurs d'établissement » ou lui avaient, au contraire, infligé d'abaissement; il mettait toute nue la « grandeur de nature »; son jugement, toujours incliné à la bienveillance, ignorait l'admiration pour les grands comme le mépris pour les petits.

On comprend ce qu'une semblable habitude mettait de justice en sa psychologie, d'ailleurs si clairvoyante et si détaillée; on comprend à quel point elle le préparait à trancher les différends entre les hommes : « En un clin d'œil, il débrouillait les questions d'ordre administratif les plus délicates et les plus épineuses, dit M. Pionchon. Il saisissait d'une vue nette et prompte les diverses solutions possibles pouvant terminer un débat d'affaires et proposait toujours, dans un esprit de bienveillance et de conciliation, la solution la plus sage et la plus raisonnable. Il était par là, dans la Faculté, un puissant instrument de concorde. Vous en aviez fait un doyen; et il me semble qu'il était éminemment qualifié pour cela. »

C'est, en effet, dans l'exercice du décanat que l'esprit et le cœur de Brunel purent se manifester tout au large.

Le 10 juillet 1896 avait été promulguée une loi dont le premier article était ainsi conçu : « Les corps de Facultés institués par la loi du 28 avril 1893 prennent le nom d'Universités. »

Pour faire de ce texte autre chose qu'un vain changement d'étiquette, qu'un leurre à l'usage de ceux qui se laissent prendre à la piperie des mots, pour donner une vie réelle aux Universités régionales dont on vient de décréter l'existence, trois buts essentiels doivent être atteints.

Il faut, en premier lieu, abattre les cloisons étanches qui séparaient, jusqu'à ce jour, les quatre Facultés l'une de l'autre; établir, entre elles, une commune circulation d'idées, une pénétration mutuelle des grades et des enseignements; donner au corps des Facultés l'unité de vie et d'aspirations, à l'image de cet organisme dont toutes les parties se relient par d'innombrables canaux et que l'on nomme le savoir humain.

En second lieu, sans briser les liens qui rattachent les Universités régionales au pouvoir central, qui retiennent en un seul faisceau toutes les parties de l'enseignement supérieur français, il faut relâcher ces liens, de telle sorte que chaque corps universitaire puisse acquérir une véritable personnalité, se développer librement suivant son type propre, entamer au besoin avec les autres Universités la lutte féconde des idées.

Enfin, il faut acquérir une connaissance exacte des besoins intellectuels, économiques, industriels du milieu où vit chaque Université; par des mesures préparées avec prudence, décidées au moment propice, modifiées au fur et à mesure que l'expérience apporte ses enseignements, soutenues cependant avec ténacité contre l'indifférence et les préjugés, il faut s'efforcer de donner satisfaction à ces besoins légitimes.

A cette œuvre triple doivent être adaptés les professeurs que les Facultés désignent pour les représenter au Conseil de l'Université, et, par-dessus tout, les plus autorisés parmi ces représentants, les doyens.

Lorsqu'en novembre 1896, la Faculté des Sciences de Bordeaux eut à choisir, dans son sein, celui qu'elle investirait d'une telle mission, il lui sembla qu'aucun de ses membres ne remplissait aussi bien que Brunel les conditions requises pour n'y point faillir.

Toute tentative qui a pour objet de transformer peu à peu l'ensemble des quatre Facultés en un corps dont les membres soient

réellement unis se heurte à un redoutable obstacle. L'étendue toujours plus grande de la science, la rigueur de plus en plus minutieuse de chacune de ses disciplines obligent chaque travailleur à resserrer son attention en un champ de jour en jour plus étroit; en même temps, les méthodes de recherches, obligées de s'adapter à une besogne de plus en plus méticuleuse, se multiplient et se différencient à l'infini. Ignorant des sciences même les plus voisines de celle qu'il étudie, chaque chercheur est porté à penser que ces sciences sont de nulle importance; inhabile au maniement des méthodes d'invention et de démonstration qu'emploient ses collègues, chaque professeur est tenté de croire que les autres ne découvrent que des chimères et qu'ils raisonnent faux. Ainsi naît et grandit le mépris intellectuel mutuel, ver rongeur de la vie universitaire.

Vainement, en Brunel, on chercherait trace de ce mépris. Il est mathématicien, mais il sait que, même en mathématiques, il y a place pour différentes méthodes; dans sa jeunesse, il a vu à Leipzig, avec F. Klein, à Berlin, avec Kronecker, les disciplines les plus opposées servir également au développement de la science; cette opposition, il la retrouve lorsqu'il compare ses recherches de prédilection à celles qui sont en vogue auprès de la plupart des géomètres français. D'ailleurs, il ne s'est point confiné au domaine, pourtant bien vaste, des mathématiques; il fréquente les laboratoires du physicien, du chimiste, du zoologiste, le jardin du botaniste; avec sa puissance d'observation, il discerne les caractères propres de la méthode que chacun d'eux suit avec succès; il ne dédaigne point la conversation du juriste ou de l'archéologue, et son impeccable mémoire conserve fidèlement leurs enseignements. Ainsi se forme en lui-même un tableau clair et précis, où chaque enseignement de l'Université occupe la place qui lui sied, où chaque professeur est jugé selon les règles de la méthode dont il se réclame. Il sait donc, lorsqu'il le faut, demander des aliments pour la vie intellectuelle de la Faculté qu'il représente; mais il sait aussi que les autres Facultés ont des besoins légitimes et il sait discerner les cas où ces besoins sont plus pressants que ceux de la Faculté des Sciences. De là, dans ses avis sur l'emploi des ressources universitaires, une équité qui s'impose; rarement, à ses demandes en faveur de la Faculté des Sciences, ses collègues ont opposé un refus; dès là que Brunel soutenait une requête, on savait que cette requête était juste.

L'autonomie des Universités à l'égard du pouvoir central n'est encore qu'en enfance; son développement normal rencontre deux sortes d'ennemis : ceux qui, par servilité, veulent tenir cet enfant en lisières, au risque de le paralyser; ceux qui, par esprit frondeur, veulent le lancer prématurément en des luttes qu'il n'est point en état de soutenir. Brunel ne connaît ni la servilité, ni l'esprit frondeur; l'autorité ne lui en impose pas, mais elle ne l'irrite pas; lorsqu'une requête en faveur d'un garçon de laboratoire rencontre des obstacles au ministère de l'Instruction publique, sans nul souci des conventions sociales, il pèse à la même balance l'avis du garçon et celui du ministre; des deux avis, il soutient celui qui lui semble juste. Aussi, quelle autorité pour faire accueillir par le pouvoir les remontrances qu'il lui soumet au nom des subordonnés, pour faire accepter par les subordonnés les décisions qu'il leur transmet au nom du pouvoir! Comme il dose justement, en un conflit, les concessions que chaque parti doit raisonnablement accorder! J'en appelle au témoignage de ceux qui ont suivi les longues négociations relatives au doctorat de l'Université de Bordeaux.

Pendant longtemps, les Universités ont vécu dans une dédaigneuse ignorance du milieu où elles sont plongées; aussi est-il également difficile aujourd'hui de faire connaître aux Universités les véritables besoins des hommes qui vivent autour d'elles, et de faire comprendre à ces hommes la nature des services que les Universités leur peuvent rendre. A cette double mission, Brunel était prédisposé par la forme si particulière de son esprit.

Il n'avait pas du milieu bordelais, dans lequel vit notre Université, une de ces vues d'ensemble, fausses à force d'être simplifiées, rendues optimistes par le désir de louer quand même ou pessimistes par le besoin systématique de dénigrer. Il voyait ce milieu tel qu'il est, composé de groupes divers dont chacun a ses besoins, ses tendances, sa manière de comprendre et d'agir; en chacun de ces groupes, il distinguait les hommes qui le dirigent ou l'inspirent, avec leur physionomie particulière, leurs habitudes, leurs sympathies et leurs antipathies; il lui était alors facile de supputer les chances de succès d'une tentative, les appuis sur lesquels elle pouvait compter, les obstacles qui lui seraient opposés.

D'autre part, pour déterminer le rôle que l'Université est appelée à jouer dans ce milieu, il ne cherchait pas une formule abstraite



qui définisse ce rôle d'une manière générale, qui soit applicable en tout temps et à toutes les circonstances. Certains aperçoivent dans le passé, que leurs souvenirs trompeurs leur représentent comme un âge d'or, le type idéal de la Faculté; ils se refusent à toute innovation qui altérerait ce type. Les autres placent dans l'avenir une Université non moins irréelle; ils marchent, les yeux fixés sur leur chimère, au risque d'achopper à tous les cailloux du chemin. Brunel se souciait aussi peu de la routine des uns que de l'utopie des autres. Il jugeait chaque projet en lui-même, aux services visibles et tangibles qu'en pouvaient attendre l'Université et le public.

Ce sens du concret se marquait particulièrement dans la méthode qu'il suivait lorsqu'il s'agissait d'instituer un enseignement nouveau.

Il est des gens qui croient posséder une liqueur précieuse lorsque, sur un flacon vide, ils ont collé une brillante étiquette. Brunel se souciait tout d'abord de remplir le flacon; quant à l'étiquette, on la collait ensuite, si on le jugeait utile et si on en avait le loisir.

Citons un exemple de sa manière de procéder.

A la session d'avril 1899, le Conseil général des Landes émet le vœu que la Faculté des Sciences de Bordeaux s'intéresse à l'industrie résinière et forme des chimistes capables de la perfectionner. Quelle suite va-t-on donner à ce vœu? Selon des règles minutieusement tracées, ce vœu doit être soumis à la Faculté des Sciences, puis, approuvé par elle, parvenir au Conseil de l'Université; celui-ci pourra créer un enseignement et, sur ses ressources, attribuer un traitement au professeur; alors, par un suffrage à deux degrés, une liste de deux candidats sera dressée, sur laquelle le Recteur choisira le titulaire du cours. Si tout marche à souhait, si l'Université croit sa fortune suffisante pour subvenir aux frais du nouvel enseignement, si le professeur nommé a la compétence nécessaire, le cours pourra peut-être être inauguré en l'année scolaire suivante; un temps précieux aura été perdu, l'occasion favorable aura peut-être échappé, mais la forme aura été respectée.

Ce n'est point ainsi que procède Brunel. Dans sa pensée, il passe en revue les divers professeurs de la Faculté, cherchant celui dont la science, l'activité, le sens pratique s'adaptent le mieux à la tâche qu'il va lui confier; il les connaît tous à fond, en sorte que son choix est bientôt fixé.

Aussitôt, il descend au laboratoire de celui qu'il a choisi et lui fait

part de son projet : avant que l'année scolaire ait pris fin, il faut que des leçons sur la récolte et le traitement des résines aient été données, que le vœu du Conseil général des Landes ait reçu une première satisfaction. Le professeur sollicité résiste ; il ne veut point abandonner des recherches de chimie minérale qui le passionnent, il ne connaît pas l'industrie des résines. Le doyen insiste ; un service est à rendre, que l'on ne peut différer ; les usines de térébenthine ne sont pas éloignées de Bordeaux ; on peut les visiter de suite, recueillir les premiers documents. Il finit par l'emporter. Les leçons demandées sont faites en temps utile et avec plein succès.

Mais ce n'est encore qu'une amorce ; il faut maintenant un laboratoire où puissent être étudiées et résolues les questions qui préoccupent les industriels landais ; il faut des préparateurs, des instruments, des produits, partant de l'argent. Cet argent, on le demandera à ceux qui doivent tirer parti de la nouvelle institution, aux départements de la Gironde et des Landes, aux Chambres de commerce, aux propriétaires de forêts de pins, aux usiniers. Il faut entreprendre une campagne, faire connaître l'œuvre que l'on se propose de réaliser, son objet, ses besoins. A cette campagne, Brunel pense chaque jour, pendant six mois, et jusqu'à la veille de sa mort ; il seconde les démarches du professeur et, bientôt, il a la joie de voir souscrire les premières subventions. Lorsque, le 23 juillet 1900, il quitte son cabinet, où il ne devait plus rentrer, l'œuvre qu'il avait menée avec tant de prudence et de décision, l'œuvre à laquelle il venait de consacrer une des dernières heures de sa vie, était assurée du succès. Il est vrai qu'au point de vue administratif, elle n'existait pas encore ; Brunel n'avait fait instituer aucun cours de chimie appliquée à l'industrie des résines ; selon lui, cette institution officielle devait suivre l'essai et en consacrer le succès ; elle ne devait pas le précéder.

Grâce à cette méthode, peu conforme aux habitudes administratives, mais pleine de bon sens et d'esprit pratique, il parvint à provoquer la création ou à favoriser le développement de maint enseignement utile au public bordelais. En l'année 1900, les jeunes gens qu'emploie l'Administration des ponts et chaussées trouvaient à la Faculté un cours de statique graphique ; les ingénieurs y suivaient l'étude critique des moteurs thermiques les plus récents ; les résiniers s'initiaient aux méthodes employées par leurs concurrents américains ; et le laboratoire de chimie biologique formait des hom-

mes habiles à protéger le vin, gloire et fortune de Bordeaux. Il fallait obtenir les ressources indispensables, assurer à chaque tentative nouvelle la publicité nécessaire, seconder les initiatives, détourner les obstacles, combattre les mauvais vouloirs, soutenir les découragements; à toutes ces tâches, par une activité incessante, avec une humeur toujours égale, Brunel suffisait.

D'ailleurs, il ne se tenait point pour satisfait; par delà les mines dont l'exploitation commençait à peine, il entrevoyait d'autres filons à explorer. En novembre 1899, il écrivait dans son rapport annuel :

« La région bordelaise, le pays des vins de Bordeaux, n'a pas encore reconnu ce qu'il doit à MM. Millardet et Gayon pour tous les services rendus. Ce n'est pas une raison pour que nous croyions devoir cesser d'être utiles. Je pense que l'étude des conditions dans lesquelles se cultivent, se récoltent et se préparent les prunes de l'Agenais, attirera l'attention de quelques-uns de nos collègues. Les champignons que l'on fait pousser ou que l'on peut faire pousser dans les carrières d'où sortent les pierres de nos maisons peuvent, dès maintenant, être fructueusement et scientifiquement exploités. Je m'imagine que la Faculté des Sciences pourrait également rendre quelques services au Périgord. Et, en regardant dans une autre direction, je suis persuadé que les goûts et les aptitudes de nos chimistes peuvent, pendant de longues années, s'exercer utilement sur les richesses des Pyrénées. Les matériaux ne manquent pas, leur mise en œuvre laisse à désirer; en cela nous pouvons être utiles. »

Si, dans l'avenir, les Facultés parviennent à s'implanter par de solides racines au sol sur lequel un caprice administratif les a jetées; si les Universités régionales doivent être autre chose qu'un beau rêve, trop tôt évanoui; si l'activité intellectuelle, aujourd'hui enfermée dans Paris et enfiévrée par cette extrême concentration, doit un jour gagner nos villes de province et y ranimer une vie qui sommeille, l'historien de cette renaissance ne pourra passer sous silence le décanat si court, mais si fécond, de Georges Brunel.

## VI

On ne comprendrait pas comment Brunel jouait avec une telle perfection ce rôle de doyen, difficile à tenir, si, à côté des qualités que nous avons vues à l'œuvre, on omettait la plus profonde et la plus

essentielle de toutes, la bonté; celle-là formait comme la base même de son caractère.

De cette bonté découlaient une extrême obligeance, un véritable besoin de rendre service à autrui; cette obligeance n'attendait pas d'être sollicitée pour agir et elle agissait discrètement, si discrètement que, souvent, elle passait inaperçue, comme pour mieux dispenser l'obligé du devoir de reconnaissance.

Aussi son cabinet de Doyen, dont la porte était toujours grande ouverte, comme le cœur de celui qui y résidait, était-il sans cesse encombré de visiteurs; de la Faculté des Sciences, comme des autres Facultés, comme des Lycées et Collèges de la région, tous ceux qui avaient besoin d'un conseil, d'un appui, d'une aide, venaient là avec confiance; et Brunel s'employait pour chacun, n'épargnant ni peines ni démarches, sacrifiant son temps, sacrifiant ses travaux, avec une telle simplicité, avec une telle égalité d'humeur, que le solliciteur ne se doutait pas des sacrifices qu'il avait imposés.

De cette abnégation silencieuse, je veux citer un exemple; ceux-là en comprendront toute la portée qui connaissent l'amour profond du mathématicien pour l'écrit où il donne la solution d'un problème, longtemps regardé comme une énigme.

En feuilletant les papiers laissés par notre Doyen, j'y trouvai le manuscrit d'un mémoire achevé et préparé pour l'impression; ce mémoire donnait la solution d'un problème de la théorie des substitutions, solution que Kirkman, Reiss, Netto, Hastings-Moore, Jan de Vries n'avaient pu obtenir. Or, ce manuscrit était daté de décembre 1895 et, depuis ce temps, il attendait l'imprimeur. Brunel aurait pu le faire passer dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles*, qui avaient donné asile à la plupart de ses recherches et dont il dirigeait la composition et la publication; mais de nombreux écrits, plusieurs thèses, avaient demandé place dans ce recueil; plutôt que de faire attendre quelqu'un de leurs auteurs, il s'était sacrifié et, sans que personne en sût rien, il avait laissé son travail au fond d'un tiroir<sup>(1)</sup>.

Il était bon pour tout le monde. Il était bon surtout pour les petits.

C'était au matin du 24 juillet 1900. On venait de m'apprendre la

(<sup>1</sup>) Ce travail, publié depuis la mort de G. Brunel, est inscrit sous le n° XCVII dans la liste des publications qui termine cette notice.

mort presque subite de l'ami, laissé la veille en pleine vigueur, en pleine activité; le garçon de laboratoire qui m'avait apporté cette lugubre nouvelle me disait : « On ne saura jamais combien M. le Doyen était bon pour nous; quand il obtenait une augmentation pour l'un de nous, il tenait à le lui annoncer lui-même; et il semblait plus heureux que celui qui était augmenté. »

Il avait la plus grande sollicitude pour cette famille si active, si vivante et si maigrement traitée des chefs de travaux pratiques et des préparateurs, espoir scientifique des Universités; il les traitait en jeunes collègues, il encourageait leurs travaux, il suivait avec un vif intérêt les progrès de leurs thèses; il s'efforçait, malgré les difficultés de l'heure présente, d'assurer leur avenir.

Il était trop bon, c'était le seul reproche que j'aie jamais entendu formuler à son égard : heureux celui qui n'en mérite point d'autre! En présence d'un acte qui semblait blâmable, sa large et clairvoyante psychologie devinait les mobiles cachés, les explications probables, les excuses possibles, et son jugement penchait vers l'indulgence, alors même que plusieurs, autour de lui, eussent souhaité qu'il condamnât.

## VII

Puisque ces pages sont destinées aux *Mémoires* de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, je veux finir en disant ce que Brunel fut pour cette Société.

Mieux que personne, il en comprenait le rôle et l'importance. Il avait vu, en Allemagne, les « wissenschaftliche Gesellschaften » assurer une continuelle circulation d'idées entre les professeurs des Facultés et tous ceux qui, dans la ville universitaire, vivent de la vie intellectuelle. A Bordeaux, il retrouvait un organe semblable et, de suite, fidèle continuateur de Houël, il prit une part active à son fonctionnement.

Dans la séance même où on le nomma membre titulaire (séance du 13 novembre 1884), on lui confia le poste d'archiviste, poste qui demande plus de dévouement qu'il n'apporte d'honneur.

La mesquine et maladroite disposition des bâtiments où loge la Faculté des Sciences ne réserve aucun cabinet de travail au professeur de calcul différentiel et intégral; Brunel élut domicile dans la salle où

la Société tient ses séances, où, sur des rayons surchargés, elle entasse le moins mal possible sa riche collection de recueils académiques. De cette précieuse bibliothèque, il devint l'âme; il la rangea; il la classa; surtout, il la dépouilla au point de connaître la plupart des travaux importants qu'elle renferme; sa prodigieuse érudition, mise avec une inlassable complaisance à la disposition des chercheurs, leur fournissait le plus précieux des catalogues méthodiques, un catalogue vivant qui se feuilletait lui-même.

Sans craindre de se dévouer aux plus humbles besognes, il se chargeait d'expédier nos *Mémoires* et nos *Procès-verbaux* aux Sociétés scientifiques qui les échangent contre leurs propres publications.

Un moment vient où la Société des Sciences de Bordeaux connaît des temps difficiles; l'activité de plus en plus grande de ses membres, surexcitée par la création récente des Universités régionales, fait affluer sur son bureau les notes, les thèses, les mémoires; richesse de l'intelligence, mais richesse dont l'acquisition engendre aisément la pauvreté matérielle, car l'imprimerie, auxiliaire indispensable, fait payer chèrement ses services; et, cependant, la subvention du Département de la Gironde a été parcimonieusement amoindrie, les largesses coutumières de l'État, qu'on a négligé de solliciter régulièrement, ont tari. Dans son embarras, la Société n'a qu'une pensée: recourir à Brunel; en le nommant secrétaire général (séance du 8 décembre 1898), elle lui confie la mission de rétablir l'équilibre de son budget. Sans perdre de temps, il se met en campagne; bientôt, la générosité de l'État reprend son cours; l'Université tient à reconnaître par une subvention l'aide qu'elle reçoit de la Société des Sciences; et des négociations, que la mort de notre secrétaire général a brusquement interrompues, mais que son successeur a pu renouer et conduire à bonne fin, préparent avec les imprimeurs un traité moins onéreux.

Pour une société scientifique, l'argent est un moyen d'action dont la nécessité se fait durement sentir; ce n'est pas l'aliment substantiel qui entretient et développe la vie. La prospérité d'une telle société ne se mesure pas à l'excédent de son budget, mais au nombre et à l'importance des idées qu'on agite en ses séances. A cette prospérité, Brunel contribue largement. C'est à la Société des Sciences de Bordeaux qu'il communique ses découvertes, chaudes encore du travail de l'invention; c'est dans nos *Mémoires*, dans nos *Procès-verbaux* qu'il publie les résultats de ses incessantes recherches sur l'*analysis situs*

et l'analyse combinatoire. Toujours modeste, toujours oublieux de soi, il s'efface lorsque des confrères réclament, pour exposer leurs idées, le temps de nos séances; mais si l'ordre du jour semble un peu vide et maigre, il s'empresse de l'enrichir de quelque problème, tenu en réserve pour de telles circonstances.

Cette modestie extrême ne va pas sans quelque excès. Lorsqu'il a surmonté une difficulté et trouvé une solution longtemps sollicitée, Brunel a satisfait sa curiosité; il lui importe peu de s'assurer l'honneur de la découverte et de faire retentir le monde des géomètres du bruit de sa renommée. Aussi, la plupart du temps, ne laisse-t-il dans nos *Procès-verbaux* qu'une trace à peine reconnaissable de ses communications; quelques lignes trop concises rappellent le problème traité et le résultat obtenu; trop souvent, aucune indication ne permet de reconstituer la marche de la solution; plus d'une énigme qu'il avait devinée reste, hélas! à déchiffrer derechef.

En permettant aux inventeurs de publier leurs trouvailles à peine achevées, en leur réservant par là un droit de priorité dont les savants se montrent si jaloux, les Sociétés scientifiques locales rendent un incontestable service; mais ce n'est point leur unique objet, ni même, peut-être, leur principale utilité. Par leur canal, un flux et un reflux continuels d'idées doit s'établir entre ceux, d'une part, dont la profession est d'enseigner et d'accroître la science et ceux, d'autre part, dont l'industrie veut éviter la routine en s'imprégnant sans cesse des influences spéculatives, ou dont l'esprit veut être constamment baigné par le courant de la pensée universelle. Cette circulation intellectuelle, les professeurs de l'enseignement supérieur ont l'obligation toute particulière de l'entretenir et de l'accélérer, obligation que d'autres devoirs leur ont fait quelque peu oublier, depuis trop longtemps peut-être.

A cette tâche, Brunel n'a pas failli. Par lui, les séances de la Société des Sciences de Bordeaux se sont parfois transformées en causeries où sa vaste érudition exposait à ses confrères le plan d'ensemble de quelque une des sciences mathématiques. Un jour (séance du 20 février 1890), il montrait par quelles généralisations successives la théorie des quantités complexes a engendré de nombreuses algèbres; un autre jour (séance du 20 mars 1890), il faisait l'historique du calcul fonctionnel ou bien (séance du 1<sup>er</sup> mai 1890) des machines à calculer de Babbage.

De tels échanges d'idées ne sont pas seulement nécessaires entre

celui dont la mission est d'accroître la science et celui qui se contente d'en suivre les progrès. Entre savants de profession, ils ne sont pas moins utiles. La différenciation extrême des procédés de recherches, la spécialisation précise et compliquée des méthodes et des instruments, l'effroyable monceau de documents qu'il faut déblayer avant d'aborder le moindre problème, obligent chaque travailleur à concentrer tous ses efforts sur une besogne de plus en plus étroite et définie. Et cependant la compénétration des diverses parties du savoir humain est chaque jour plus intime; entre les disciplines jadis séparées, les cloisons se dissolvent, les joints s'effacent; des mathématiques aux sciences de la nature s'établit une gradation de mieux en mieux ménagée, une continuité de plus en plus parfaite. Dans cette foule d'ouvriers, chacun ne connaît que la toute petite pierre sur laquelle il vit penché, qu'il taille et cisèle avec des soins minutieux; comment les innombrables fragments de cette mosaïque s'ajusteront-ils les uns aux autres pour composer un tableau harmonieusement composé, aux couleurs nuancées et fondues, si les ouvriers ne coordonnent leurs efforts, si chacun d'eux ne compare fréquemment le menu morceau qu'il façonne aux morceaux que polissent ses compagnons?

A ces indispensables rapprochements entre sciences voisines, Brunel est particulièrement préparé par son inlassable obligeance, par son universelle curiosité, par son érudition vaste et sûre, par sa connaissance de théories mathématiques à la fois si utiles et si peu connues. Aussi, les travaux de M. Paul Tannery sur l'astronomie grecque suscitent-elles son goût pour les problèmes arithmétiques et l'amènent-elles à éclairer d'un jour nouveau la question des cycles astronomiques. Plus tard, les recherches sur l'élimination poursuivies par M. Hadamard le conduisent à résoudre un beau problème de partition. Aux vues profondes que son jeune collègue jette sur la théorie des lignes géodésiques, il contribue tantôt en démontrant un lemme délicat qui ressortit à l'*analysis situs*, tantôt en donnant un exemple d'une surface à nappes infinies dont les courbures sont partout opposées. Qui de nous a oublié ces séances, rendues si vivantes par l'émulation de ces deux géomètres, à l'intelligence si puissante et cependant si diverse? Pascal y eût admiré le concours de l'amplitude d'esprit avec la force et la droiture d'esprit.

De telles collaborations sont bienfaisantes; entre deux savants, elles engendrent une solidarité intellectuelle, qui devient bientôt l'estime



de deux hommes l'un pour l'autre, puis l'affection de deux amis. Elles hâtent l'évolution qui, peu à peu, fait perdre au travail de la pensée son caractère jalousement individuel, qui lui donne une forme sociale, en assurant la communion de plus en plus intime des intelligences humaines.

## SECONDE PARTIE

### LES TRAVAUX

#### SECTION 1. — Géométrie pure.

Un grand nombre de recherches d'*analysis situs* poursuivies par Brunel conduisent à des résultats qui importent à la géométrie générale; nous en remettons l'examen aux sections qui traiteront de l'*analysis situs*, nous bornant, pour le moment, à étudier les publications qui ont trait à la géométrie pure.

Pour démontrer, en géométrie élémentaire, l'équivalence de deux figures planes ou solides, on décompose souvent chacune des deux figures en un nombre limité de parties telles que chacune des parties de la première figure se superpose à chacune des parties de la seconde, et réciproquement. Ce mode de démonstration si convaincant et, pour ainsi dire, si concret ne pouvait manquer de séduire Brunel, qui s'en est occupé à plusieurs reprises. Il a montré, par exemple, comment une telle dissection permettait de transformer un parallépipède rectangle en un cube (LVIII) (1); pour que cette décomposition soit possible, les longueurs des arêtes du parallépipède doivent satisfaire à certaines conditions d'inégalité.

Les conditions d'équivalence que la géométrie établit ne peuvent être toutes démontrées par un tel procédé; certaines d'entre elles exigent le recours à d'autres méthodes, notamment à la méthode des limites: c'est par cet artifice, en particulier, que l'on démontre l'équivalence de deux pyramides de bases équivalentes et de même hauteur. Les procédés *stéréotomiques* n'ont pu, jusqu'ici, établir cette équivalence:

(1) Les indications en chiffres romains, placées entre parenthèses, renvoient à la liste des publications de G. Brunel, qui termine la présente notice.

s'ils y sont impuissants, il serait intéressant de le démontrer rigoureusement et de lever le doute que formulait Bolyai : « *At pyramidem triangularem æqualitate terminata ad prisma reduci posse vel non posse adhucdum non liquet.* »

Par une ingénieuse démonstration, M. Bricard avait pensé établir que l'on ne peut, en général, décomposer un polyèdre donné en un nombre fini de parties, de manière à le transformer en un autre polyèdre équivalent également donné. Précisant une remarque de M. Hadamard, Brunel prouva (LXXIV) que la démonstration de M. Bricard n'était pas convaincante; elle excluait implicitement un mode de décomposition possible.

Nous restons dans le même ordre d'idées en analysant une note sur un groupe d'opérations (LXXV).

Un cube est placé sur une table; par des rotations convenables autour de ses axes quaternaires de symétrie, on peut évidemment l'amener d'une position initiale quelconque à une position finale quelconque; on peut, d'ailleurs, y parvenir en excluant toute rotation autour d'un axe quaternaire normal à la table.

Ce problème peut se généraliser.

Prenons quatre cubes disposés de manière à présenter deux lignes, de deux cubes chacune, et deux colonnes, de deux cubes chacune. Les deux cubes d'une même ligne ont un axe quaternaire commun, parallèle au plan de la table; les deux cubes d'une même colonne ont un axe quaternaire commun, perpendiculaire au plan de la table; excluons tous les déplacements sauf les rotations simultanées des deux cubes d'une même ligne ou des deux cubes d'une même colonne autour d'un quaternaire commun.

Si l'on a marqué d'avance une face de chacun des cubes et si on donne à ces solides une disposition initiale quelconque, on peut toujours, par les déplacements indiqués, amener les quatre faces marquées à être dans un même plan.

Mais si, sur chacune des faces marquées, on a en outre marqué l'un des sommets, on ne pourra pas toujours amener les quatre sommets marqués à occuper le centre du carré formé par les quatre faces marquées; selon la disposition initiale des quatre cubes, on pourra ou l'on ne pourra pas obtenir ce résultat; le nombre des cas favorables est égal au nom des cas défavorables.

Deux côtés d'un polygone peuvent se couper en un point qui ne soit

pas un sommet du polygone; ce point est alors un *point double*. Baltzer a cherché à déterminer le nombre maximum de points doubles que puisse présenter un polygone de  $n$  côtés; mais la règle à laquelle il était parvenu n'est point exacte; selon cette règle, en effet, un hexagone ne peut avoir plus de 6 points doubles; or, il est aisé de construire (LIV) un hexagone dont le périmètre présente 7 points doubles.

La faute commise par Baltzer se reconnaît sans peine; si l'on modifie son raisonnement de telle sorte que cette faute soit évitée, on parvient au théorème suivant :

Lorsque le nombre  $n$  de côtés du polygone est impair, le nombre des points doubles peut prendre toutes les valeurs de 0 à  $\frac{n(n-3)}{2} - 2$  et la valeur  $\frac{n(n-3)}{2}$

Lorsque le nombre  $n$  des côtés est pair, le nombre des points doubles peut prendre toutes les valeurs de 0 à  $\frac{n(n-4)}{2} + 1$ .

Un point multiple d'ordre  $\mu$  doit être considéré comme équivalent à  $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$  points doubles. Mais tous les points doubles d'un polygone ne peuvent pas se rassembler en des points multiples. C'est ainsi, par exemple, que les points doubles d'un pentagone sont toujours distincts.

Signalons brièvement une note (V) sur les conditions à éviter lorsqu'on veut fixer un système articulé de telle sorte qu'il ne *joue* pas et terminons par des remarques *sur la définition de la ligne droite en topologie* (XXXV).

Dans les raisonnements qui relèvent de l'*analysis situs*, la notion de distance est bannie; une ligne droite est donc uniquement une ligne définie d'une manière univoque par deux points; or, cette définition suffit à établir certaines propositions de géométrie élémentaires; ces propositions doivent donc être regardées comme des théorèmes de topologie.

Cette note établit le lien entre les recherches purement géométriques et les recherches d'*analysis situs* que nous examinerons plus loin.

## SECTION 2. — Géométrie analytique à 2, 3 et $n$ dimensions.

I. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A 2 DIMENSIONS. — La *théorie des développantes et des développées* se présente avec une grande élégance (XI)

lorsqu'on se donne la courbe comme enveloppe de ses tangentes; ainsi présentée, cette théorie se prête à des interprétations analytiques intéressantes; elle fournit, par exemple, une figuration géométrique simple des intégrales définies portant sur des fonctions de lignes trigonométriques.

Une *courbe autopolaire* coïncide avec sa transformée par polaires réciproques. Brunel a établi (XVI) certaines conditions qui sont nécessaires, mais non suffisantes pour qu'une courbe soit autopolaire. Ces conditions s'obtiennent en écrivant que, dans les formules de Plücker, les nombres  $\mu$  et  $\nu$ ,  $\delta$  et  $\tau$ ,  $\chi$  et  $\xi$  sont respectivement égaux. Dans une communication dont il ne nous reste qu'un résumé trop succinct, le problème avait été entièrement traité pour les courbes du second degré; des exemples avaient été donnés pour les courbes de degré supérieur; enfin l'équation différentielle fonctionnelle à laquelle satisfont toutes ces courbes avait été formée.

C'est encore un résumé, succinct à l'excès, qui nous reste d'une communication sur les *trajectoires réciproques* (XVIII).

Soient  $C$  une courbe quelconque et  $Oy$  une droite de son plan. Que l'on prenne la courbe  $C'$ , symétrique de  $C$  par rapport à  $Oy$ , et que l'on déplace  $C'$  parallèlement à  $Oy$ ; si  $C'$  coupe constamment  $C$  sous le même angle,  $C$  est une trajectoire réciproque.

La détermination d'une trajectoire réciproque est un problème historique; posé par D. Bernoulli, il a sollicité les efforts d'A. Bernoulli, de Leibniz et surtout d'Euler.

Brunel, dans la communication citée, donne une construction générale des trajectoires réciproques dans le cas où l'angle constant est droit; des lois fixes permettent de passer de ce cas particulier au cas général; enfin, étant données une ou plusieurs trajectoires réciproques préalablement construites, on peut en déduire une infinité.

La *note sur le nombre des sommets des courbes planes rationnelles d'ordre  $n$*  (XLVI) ne nous laisse point, comme les précédentes, le regret d'une pensée presque évanouie.

Un *sommet* est, sur une courbe plane, un point où le rayon de courbure est maximum ou minimum. Combien existe-t-il, en général, de sommets sur une de ces courbes que Cayley nomme *unicursales* et Brunel *rationnelles*? Une méthode élégante, qui redonne incidemment les résultats de Plücker touchant les points doubles de semblables courbes, conduit au théorème suivant :

Une courbe plane, rationnelle, d'ordre  $n$ , présente, en général,  $(8n - 12)$  sommets.

II. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A 3 DIMENSIONS. — Trois équations linéaires entre les coordonnées homogènes d'une droite définissent un hyperboloïde. Avec le tableau des coefficients de ces équations (matrice), on peut former 20 déterminants du 3<sup>e</sup> ordre, que l'on peut nommer les *coordonnées de l'hyperboloïde* (XXV). Ces 20 coordonnées satisfont à 30 relations. De ces 30 relations, 10 seulement sont indépendantes; les 20 autres s'en déduisent.

Les procès-verbaux de la Société des Sciences de Bordeaux ne nous fournissent presque aucune indication sur la méthode qui permet d'établir ces résultats; on peut deviner quelle était cette méthode en se reportant à la solution d'un problème analogue, concernant les coordonnées de la droite dans un espace à 4 dimensions; ce problème est traité par Brunel dans un travail (III) qui sera analysé à la section suivante.

La surface terminale d'un liquide soumis à la pesanteur et à la capillarité (XXXVII) dépend d'une équation bien connue qui a été donnée par Laplace; cette équation est aux dérivées partielles du second ordre. Dans le cas particulier où le vase est un cylindre de révolution à génératrices verticales, dans le cas aussi où il se réduit à l'espace compris entre deux lames parallèles et verticales, cette équation se ramène à une équation différentielle ordinaire. Semblable réduction peut-elle se présenter dans d'autres cas? Pour qu'elle soit possible, il faut que les sections de la surface capillaire par les plans horizontaux forment une suite de cercles de même axe ou une suite de droites parallèles. Les seuls cas de réduction qui se puissent présenter sont donc connus depuis longtemps.

Mairan (XLIII) a énoncé ce théorème : Si l'on déforme un octaèdre de telle sorte qu'il demeure constamment inscrit dans un cube, sur chaque face du cube, le sommet de l'octaèdre décrit une hyperbole.

Sur chaque face du cube, le lieu du sommet de l'octaèdre se compose en réalité de quatre hyperboles.

Le *paraboloïde hyperbolique*

$$x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$$

a, en chacun de ses points, une courbure négative; de cette surface, Brunel en déduit une autre (LXXVII) dont les deux courbures sont

également, en chaque point, opposées l'une à l'autre et qui possède quatre nappes infinies. Une telle surface fournit un exemple intéressant aux recherches poursuivies à la même époque, par M. Hadamard, sur les lignes géodésiques.

III. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A  $n$  DIMENSIONS. — Le premier écrit publié par Georges Brunel, alors étudiant à l'Université de Leipsick, porte sur *les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à  $n$  dimensions* (I); ce travail, suite naturelle des recherches de M. C. Jordan et de M. H. d'Oviedo, a pour objet principal d'étendre à de telles courbes les lois bien connues qui régissent la courbure des courbes gauches dans l'espace à 3 dimensions.

Deux espaces linéaires à  $p$  et  $q$  dimensions étant donnés, il y a des fonctions de leurs coefficients qui demeurent invariables par une substitution orthogonale; M. Jordan, qui a étudié ces fonctions, a défini en particulier celles que l'on doit regarder comme représentant les *angles* de ces deux espaces. Brunel forme, en premier lieu, l'équation qui donne les cosinus des angles de deux espaces à  $p$  dimensions tracés dans un même espace linéaire à  $n$  dimensions.

Passant ensuite à l'étude des courbes gauches tracées en un tel espace, il montre qu'une semblable courbe admet, en chacun de ses points,  $(n - 1)$  espaces linéaires *osculateurs* qui sont respectivement à 1, 2, ...  $(n - 1)$  dimensions; ces espaces sont la généralisation de la tangente et du plan osculateur à une couche gauche dans l'espace à 3 dimensions.

L'espace linéaire à  $p$  dimensions osculateur en un point de la courbe contient tous les espaces d'un moindre nombre de dimensions, qui sont osculateurs au même point.

A chacun de ces espaces osculateurs correspond un *rayon de courbure*; on a donc à considérer, en chaque point de la courbe,  $(n - 1)$  rayons de courbure, généralisations du rayon de courbure et du rayon de torsion que l'on définit dans le cas où  $n = 3$ .

Ces  $(n - 1)$  rayons de courbure en chaque point d'une courbe gauche vérifient des relations dont la forme, pour l'espace à 3 dimensions, est connue depuis longtemps. En particulier, la distance d'un point de la courbe voisin du point M à l'espace linéaire à  $p$  dimensions osculateur au point M est un infiniment petit d'ordre  $(p + 1)$ .

Les formules de Serret et Frenet s'étendent également aux courbes gauches tracées dans un espace linéaire à  $n$  dimensions.

On peut enfin, en chaque point, considérer  $(n - 1)$  *espaces sphériques osculateurs*, qui sont respectivement à 1, 2, 3, ...  $(n - 1)$  dimensions, et qui admettent pour rayons les  $(n - 1)$  rayons de courbure.

Ces divers théorèmes ont été obtenus par l'usage de *matrices*; ils ont donc des liens avec la théorie des matrices que nous retrouverons en la Section V.

Il est naturel d'étendre cette étude sur la courbure d'un espace quelconque à une dimension tracé dans un espace linéaire à  $n$  dimensions et d'aborder l'examen de la courbure d'un espace quelconque à  $p$  dimensions tracé dans un espace linéaire à  $n$  dimensions; on sera amené ainsi à généraliser les lois qui régissent la courbure des surfaces tracées dans l'espace ordinaire à 3 dimensions. Une indication trop brève, contenue dans les procès-verbaux des séances de la Société des Sciences de Bordeaux (XXIX), nous apprend que Brunel avait entrepris cet examen et qu'il avait obtenu, en particulier, la généralisation du célèbre théorème de Meusnier.

Un troisième travail (III) a pour objet d'interpréter, par la géométrie à  $n$  dimensions, les problèmes d'analyse indéterminée : mais l'objet de ce travail étant plutôt le progrès des méthodes arithmétiques, l'examen en sera réservé à la section suivante. Citons toutefois une proposition qui se trouve établie dans ce travail, et qui concerne la géométrie générale à  $n$  dimensions :

« Nous pouvons considérer l'étude de l'espace à 3 dimensions où les éléments constitutants sont des droites ou bien, suivant l'expression adoptée, de l'espace réglé, comme identique à l'étude des fonctions homogènes de six variables, ces six variables étant assujetties à la restriction de satisfaire à l'équation du second degré. »

« Ce résultat peut s'exprimer autrement en ayant recours aux termes de la géométrie. L'étude de l'espace réglé est identique à l'étude d'un espace gauche à quatre dimensions et du second ordre situé dans un espace linéaire à cinq dimensions. Les complexes, les connextes et les surfaces réglées sont des espaces à trois, deux et une dimensions situés sur cet espace gauche du second ordre. »

Dans le travail qui nous occupe, Brunel se borne à cette courte indication, qui nous fait envisager la géométrie de l'espace réglé comme une généralisation de la description des surfaces du second



ordre par leurs génératrices rectilignes; mais nous savons, pour l'avoir recueilli de sa bouche, que ce mode d'interprétation l'avait conduit à transposer les nombreuses propositions établies par M. G. Kœnigs dans l'étude de l'espace réglé, transposition qui rendait intuitives bon nombre de ces propositions.

Ce procédé de transposition peut s'étendre. C'est ainsi que l'étude de l'espace réglé à quatre dimensions équivaut à l'étude d'un espace gauche à six dimensions et du cinquième ordre tracé dans l'espace linéaire à neuf dimensions.

Cette généralisation est tirée d'intéressantes remarques sur la représentation de la droite dans l'espace linéaire à quatre dimensions.

Dans un tel espace, la droite est l'intersection de trois espaces linéaires à 3 dimensions; au moyen des 15 coefficients qui figurent dans les équations de ces trois espaces, formons une matrice; elle engendre 10 déterminants que l'on peut nommer *coordonnées de la droite* dans l'espace linéaire à 4 dimensions.

Ces 10 coordonnées vérifient 20 relations; mais ces 20 relations ne sont pas indépendantes; elles équivalent seulement à 12 conditions indépendantes.

Ces théorèmes sont analogues aux propositions touchant les *coordonnées de l'hyperboloïde* (XXV) que nous avons analysées ci-dessus.

### SECTION 3. — Théorie des Nombres.

L'emploi d'un calcul symbolique dont, malheureusement, l'existence seule nous est signalée (XVII), permet de déterminer les coefficients qui apparaissent dans une certaine équation différentielle d'ordre  $n$ , généralisation de l'équation du second ordre à laquelle satisfait la série hypergéométrique.

Le tableau des coefficients s'obtient sous une forme analogue au triangle arithmétique de Pascal; les termes de ce tableau satisfont à une équation aux différences finies de forme excessivement simple.

L'existence des cycles astronomiques jouait, chez les anciens, un rôle considérable; M. Paul Tannery a consacré à cette question un important travail inséré aux *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*. A ce sujet, Brunel montre (XIV)

comment la recherche de tels cycles est liée à la théorie des fractions continues.

Soient  $e_1, e_2, \dots, e_n$ ,  $n$  quantités quelconques et  $\overline{\phantom{x}}$  le signe de l'égalité approchée; si l'on agit de déterminer des nombres entiers  $p_1, p_2, \dots, p_n$  tels que l'on ait

$$p_1 e_1 \overline{\phantom{x}} p_2 e_2 \overline{\phantom{x}} p_3 e_3 \overline{\phantom{x}} \dots \overline{\phantom{x}} p_n e_n.$$

Dans le cas où  $n = 2$ , l'emploi des fractions continues donne la plus grande approximation possible, et « l'on peut dire qu'en ayant recours à des réduites d'ordre de plus en plus élevé, l'approximation tend à devenir une égalité, le point inférieur du signe  $\overline{\phantom{x}}$  s'élargit et tend à devenir une barre égale à la barre supérieure ».

Si  $n$  est supérieur à 2, les fractions continues trouvent encore leur emploi, pourvu que l'on ait recours à la proposition suivante :

Lorsque l'on a  $e \overline{\phantom{x}} \frac{a}{b} \overline{\phantom{x}} \frac{a'}{b'}$ , on a également

$$e \overline{\phantom{x}} \frac{ma + m'a'}{mb + m'b'}.$$

Ce lemme posé, les fractions continues obtenues par la considération des rapports deux à deux de l'année tropique  $T$ , de la révolution synodique  $S$ , de la révolution anomalistique  $A$  et de la révolution draconitique  $D$ , permettent de trouver tous les cycles qui ont été successivement proposés.

Cette communication de Brunel suggéra à M. Paul Tannery d'intéressantes remarques qui furent communiquées à la Société des Sciences de Bordeaux dans la séance du 16 mai 1889.

L'analyse indéterminée (III) a pour objet de résoudre en nombres commensurables un système de  $p$  équations entre  $n$  variables; ce problème peut évidemment s'énoncer d'une autre manière, qui est la suivante :

Sur un espace à  $(n - p)$  dimensions, tracé dans l'espace linéaire fondamental à  $n$  dimensions, déterminer les points dont toutes les coordonnées sont représentées par des nombres commensurables. Sans être jamais nécessaire, cette transposition fournit d'intéressantes interprétations des solutions qui ont été obtenues autrement ou suggère des solutions nouvelles.

De ce double rôle, on peut citer un intéressant exemple.

Après avoir démontré que l'on ne peut résoudre en nombres entiers l'équation

$$x_1^3 + x_2^3 = y_1^3,$$

Euler, dans son Algèbre, s'occupe de l'équation

$$(1) \quad x_1^3 + x_2^3 = y_1^3 + y_2^3.$$

Les formules auxquelles il arrive, après avoir été modifiées par Binet, ont appelé l'attention d'Hermite; celui-ci, remarquant que l'équation (1) était l'équation, rendue homogène, d'une certaine surface du 3<sup>e</sup> ordre, a déduit de considérations géométriques simples les formules d'Euler et de Binet.

Brunel considère l'équation

$$(2) \quad x_1^n + x_2^n = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & 0 \\ 0 & y_1 & \dots & y_{n-2} & y_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_2 & y_3 & \dots & y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

où  $n$  est un nombre premier autre que 2.

Cette équation, généralisation naturelle de l'équation (1), représente, en coordonnées homogènes, un espace à  $(n - 1)$  dimensions tracé dans l'espace linéaire à  $n$  dimensions. On peut, sur cet espace, déterminer des points dont toutes les coordonnées sont commensurables et, partant, déterminer des solutions en nombres entiers de l'équation (2).

La méthode employée est susceptible de nombreuses généralisations. Par des considérations au cours desquelles il émet, touchant l'espace réglé, les importantes propositions que nous avons mentionnées en la Section 2, Brunel obtient le résultat suivant :

La considération de la droite dans l'espace à  $n$  dimensions conduit à considérer une matrice de  $(n - 1)$  lignes et de  $(n + 1)$  colonnes; les  $\frac{n(n+1)}{2}$  déterminants qui la constituent sont liés par  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  conditions représentées, en réalité, par un plus grand nombre d'équations du second degré. On sait former une infinité de solutions en nombres entiers de ces équations.

Des considérations analogues s'appliquent à un espace linéaire à  $p$  dimensions situé dans un espace fondamental linéaire à  $n$  dimensions.

## SECTION 4. — Algèbre.

La contribution la plus importante apportée par Georges Brunel aux progrès de l'Algèbre se trouve dans le travail qui lui a servi de thèse de Doctorat (II); ce travail est intitulé : *Étude sur les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques de genre 3*.

Les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques de genre 2 ont été étudiées d'abord par Göpel. Parmi les relations découvertes par Göpel, il en est une qui a eu les conséquences les plus fécondes, tant en analyse qu'en géométrie : c'est la relation homogène et du quatrième degré qui relie quatre des fonctions  $\Theta$  à deux variables convenablement choisies. D'une part, en effet, Hermite a montré que cette relation jouait un rôle essentiel dans la théorie de la transformation des fonctions abéliennes du premier ordre; d'autre part, Cayley, Borchardt, Weber, Klein, Rohn, Darboux, Brioschi ont montré comment la relation biquadratique de Göpel fournissait la représentation la plus simple et la plus féconde de la surface du quatrième ordre à 16 points doubles découverte par Kummer.

Le travail de Göpel devint le point de départ des recherches sur les relations algébriques qui peuvent exister entre les fonctions hyperelliptiques, recherches qui furent poursuivies par Rosenhain, par Weierstrass, par Cayley surtout, et, en dernier lieu, par Brunel.

Au lieu de considérer les fonctions hyperelliptiques de genre 3 que désigne habituellement la lettre  $\Theta$ , Brunel considère d'autres fonctions, les fonctions  $P$ , déjà étudiées par Weierstrass et par M. Schottky, qui se forment au moyen de quotients de fonctions  $\Theta$ ; il existe une fonction  $P_o$ , 7 fonctions  $P_k$ , 21 fonctions  $P_{kl}$  et 35 fonctions  $P_{klm}$ ; soit, en tout, 64 fonctions  $P$ .

Le mémoire de Brunel, exemple remarquable de son aptitude au calcul algébrique même le plus compliqué, ne souffre pas l'analyse; bornons-nous donc à lui emprunter l'énoncé des principaux résultats :

« Nous parvenons facilement, dit-il, à démontrer l'existence de 64 groupes de 8 fonctions  $P$ , tels qu'entre les carrés de 5 fonctions appartenant à un même groupe existe une relation linéaire. »

« Nous montrons ensuite comment on peut directement, et sans l'emploi des formules que nous venons de signaler, trouver des rela-

tions linéaires entre les carrés de fonctions en nombre supérieur à 5. »

« On sait qu'il existe aussi des relations linéaires entre les produits deux à deux des fonctions P. Notre méthode de calcul nous les fournit sans difficulté aucune et nous en trouvons plusieurs qui n'étaient pas connues. »

« Les 64 groupes de relations linéaires trouvées précédemment permettent, en choisissant convenablement 8 fonctions P, d'exprimer en fonctions linéaires de leurs carrés, les carrés des 56 autres fonctions. »

« Entre les 8 fonctions ainsi choisies comme bases existent des relations algébriques de degré supérieur qui nous sont fournies presque immédiatement par les relations entre les produits que nous avons déterminées auparavant. »

« Ce que nous disons ici des fonctions P a lieu évidemment pour les fonctions  $\Theta$ . Leur dépendance algébrique se trouve donc précisée, sinon d'une façon définitive, du moins d'une manière plus complète que cela n'avait été fait jusqu'ici. »

A la fin de sa Thèse, Brunel indique brièvement comment certaines des méthodes employées dans l'étude des relations algébriques entre fonctions hyperelliptiques de genre 3 peuvent s'étendre au cas où le genre a une valeur quelconque. Puis il pose un problème dont il serait bien intéressant de poursuivre la solution :

Les propriétés des fonctions hyperelliptiques de genre 2 sont intimement liées, nous l'avons vu, à l'étude de la surface de Kummer; de même, l'étude des relations algébriques entre les fonctions P de genre 3 conduit à considérer un espace gauche à 3 dimensions tracé dans l'espace linéaire fondamental à 5 dimensions. Il serait intéressant d'étudier d'une façon spéciale l'espace gauche que nous venons de signaler; de voir quelles en sont les singularités, d'examiner le mode de définition géométrique de cet espace remarquable, d'essayer de faire pour lui ce qui a été fait déjà pour la surface de Kummer.

Des autres recherches algébriques de Brunel, les procès-verbaux de la Société des Sciences de Bordeaux nous donnent seulement des résumés très succincts.

Des considérations très ingénieuses, mais un peu subtiles (XXVII), montrent que le théorème de Lindemann : Le nombre  $\pi$  est un nombre transcendant, peut être regardé comme une conséquence du théorème de Lambert :  $\pi$  est incommensurable, ou du théorème d'Hermite :  $\pi^2$  est incommensurable.

De nombreux géomètres, Van der Monde, Hirsch, Cayley, Faa de Bruno, Durfée, Rovorosky, Mac Mahon, ont publié des tableaux de fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique. Ces tableaux présentent des dispositions variées et se prêtent à des dispositions plus nombreuses encore. Un arrangement convenable peut mettre en évidence des relations remarquables entre les coefficients; on a ainsi des séries de propositions qui se rapportent à une disposition particulière des tableaux et cessent d'être valables si l'on adopte une autre disposition (XXXVIII).

Citons, en terminant, une intéressante démonstration (XXIV), fondée sur des considérations topologiques, du théorème fondamental de l'Algèbre : Toute équation de degré  $n$  a  $n$  racines. Cette démonstration établit un lien entre les considérations purement algébriques et les recherches d'*analysis situs* qui tiennent une si grande place dans l'œuvre de Brunel.

## SECTION 5. — Extensions diverses de l'Algèbre.

Les mathématiciens, après avoir généralisé l'algèbre des quantités réelles en introduisant les symboles imaginaires, ont été conduits à composer un grand nombre d'algèbres de plus en plus générales : quaternions, théorie des clés, théorie des matrices, Ausdehnungslehre, etc.

Brunel n'a cessé de s'intéresser à ces diverses algèbres; nous avons vu, en particulier, qu'il avait fait de la théorie des matrices un fréquent usage dans l'étude de la géométrie analytique à 3 ou à  $n$  dimensions; il a, en outre, contribué au développement même de cette théorie.

Il s'est occupé (X), en particulier, des racines de la matrice zéroïdale d'ordre  $n$ .

La racine  $n^{\text{e}}$  d'une matrice de cette espèce contient  $n(n-1)$  quantités arbitraires et peut s'exprimer linéairement en fonction de  $\frac{n(n-1)}{2}$  matrices jouissant de lois de multiplication remarquables. La forme à laquelle on arrive ainsi pour la matrice générale dont la puissance  $n^{\text{e}}$  reproduit la matrice zéroïdale conduit immédiatement à la solution du problème suivant : déterminer les matrices pour lesquelles l'élévation à une puissance inférieure à  $n$  reproduit la matrice dont tous les éléments sont nuls.

Une autre communication (XII), dont les *procès-verbaux* ne renferment presque que le titre, avait pour objet la formation des matrices  $m$  d'ordre  $n$  qui satisfont à l'équation

$$m^p + \mu m^{p-1} = 0,$$

où  $p$  est au plus égal à  $n$ ; le cas de  $p = 2$  avait été considéré en particulier.

C'est au même ordre de recherches sur les généralisations de l'algèbre que se rapporte une communication, trop succinctement résumée, touchant les *algèbres linéaires non associatives* (XXX). En une telle algèbre, il existe des systèmes normaux d'unités fondamentales. Soit  $\varepsilon$  le symbole d'une telle unité. Ces unités se classent en deux groupes : pour les unes,  $\varepsilon^2 = 1$  ; pour les autres,  $\varepsilon^2 = 0$ .

Les symboles de l'algèbre sont susceptibles de généralisations d'une tout autre nature (XIII).

Soit  $o$  un objet ou un élément quelconque, parfaitement déterminé ; sur cet objet effectuons une opération d'une nature quelconque, symbolisée par la lettre  $P$ , et supposons que cette opération donne naissance à un nouvel objet  $o_1$ , également bien déterminé ; nous pourrions exprimer symboliquement ce fait en écrivant

$$P(o) = o_1.$$

L'objet  $o$  peut être une grandeur algébrique, l'opération  $P$  une des opérations qui sont représentées par les symboles fonctionnels de l'algèbre ; l'objet  $o_1$  sera alors une nouvelle grandeur algébrique ; l'égalité précédente sera alors une des égalités que l'on a coutume de considérer en algèbre.

Mais il en peut être tout autrement. On peut supposer, par exemple, que  $o$  soit une certaine figure plane, que  $P$  représente l'opération qui consiste à former la figure polaire réciproque par rapport à une certaine conique du plan ; l'objet  $o_1$  sera alors la figure transformée par polaires réciproques de la figure  $o$ .

Il peut arriver que l'objet  $o_1$  puisse être soumis de nouveau à l'opération  $P$  et donne ainsi un nouvel objet bien déterminé  $o_2$  ; on a alors

$$o_2 = P(o_1) = P[P(o)],$$

ce que l'on convient d'écrire

$$o_2 = P^2(o).$$

On est ainsi amené à définir le sens du symbole  $P^m(o)$ , où  $m$  est un entier positif.

Supposons qu'une certaine opération, appliquée à l'objet  $o_1$ , reproduise l'objet  $o$ ; nous représenterons cette opération par  $P^{-1}(o_1)$ , en sorte que nous aurons  $P^{-1}(o_1) = o$  ou bien

$$P^{-1}P(o) = o.$$

Nous sommes ainsi conduits à définir le sens du symbole  $P^{-n}(o)$ , où  $n$  est un entier positif.

Par une extension de la notion de périodicité, on dit que la fonction  $f$  admet la périodicité représentée par la fonction  $\varphi$  si l'on a, quel que soit  $z$ ,  $f[\varphi(z)] = f(z)$ . De même, on dira que l'opération  $Q$  admet la périodicité représentée par l'opération  $P$ , si l'on a l'égalité symbolique

$$QP(o) = Q(o)$$

pour tout objet  $o$  qui peut être soumis aux opérations indiquées. Cette *généralisation de la notion de périodicité* se prête à des développements intéressants.

Il peut arriver que si l'on effectue l'opération  $P$  sur l'objet  $o$ , puis de nouveau l'opération  $P$  sur le résultat de l'opération précédente, et ainsi de suite, la  $n^{\text{e}}$  opération  $P$  donne comme résultat l'objet  $o$  dont on était parti; cette particularité, qu'exprime l'égalité symbolique

$$P^n(o) =$$

s'énonce en disant que l'opération  $P$ , répétée  $n$  fois, *se ferme* sur elle-même (XV). Dans le cas où  $n = 2$ , l'opération est *douée de réciprocity*; la transformation par polaires réciproques, la transformation par rayons valeurs réciproques, sont telles que

$$P^2(o) = o.$$

Cette algèbre symbolique peut donner lieu à des problèmes bien divers. En voici un (LXXVIII) qui a d'importantes applications dans la théorie de l'enlacement des courbes : (Voir ci-après, Section VI.)

On considère un certain nombre d'opérations

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$



et leurs inverses

$$P_1^{-1}, \quad P_2^{-1}, \quad \dots, \quad P_n^{-1}.$$

On demande de construire, avec ces opérations, une suite d'opérations dont le résultat final jouisse de la propriété suivante : Si l'une quelconque des opérations constitutantes se réduit à l'opération identique, l'opération totale se réduit également à l'opération identique.

Brunel a montré que l'on peut, quel que soit  $n$ , constituer une suite d'opérations qui jouisse de la propriété indiquée; il a, en outre, montré de quelle manière le problème et la solution prêtaient à des généralisations.

## SECTION 6. — **Analysis situs. — Recherches sur les Réseaux.**

I. ÉTUDE ET CONSTRUCTION DE RÉSEAUX PRÉSENTANT DES CARACTÈRES TOPOLOGIQUES DONNÉS. — Considérons un ensemble de points reliés les uns aux autres par des lignes de forme quelconque; la configuration formée par la totalité des points et des lignes constitue un *réseau*; les points reçoivent le nom de *sommets*, les lignes le nom d'*arêtes* du réseau. Au point de vue de la branche d'*analysis situs* qui nous occupe en ce moment, la forme d'une arête qui relie deux sommets est complètement indifférente; en d'autres termes, la configuration est déformable à volonté, pourvu qu'après une déformation, les dispositions relatives des sommets et des arêtes n'aient pas été altérées.

Nous conviendrons de ne considérer par la suite que des *réseaux connexes*, c'est-à-dire tels que l'on peut, en suivant les arêtes du réseau, aller d'un sommet quelconque à un autre sommet également quelconque.

Les géomètres ont obtenu, touchant les réseaux, quelques théorèmes généraux :

Le nombre des sommets d'où partent des arêtes en nombre impair est nécessairement pair; si l'on désigne par  $2q$  ce nombre, le nombre minimum de traits continus, simples (c'est-à-dire dont aucune portion n'est décrite deux fois), qui passent par toutes les arêtes est égal à  $2q$ .

Si le réseau ne contient pas de sommets impairs ( $q = 0$ ), la proposition précédente est en défaut; le réseau peut être tout entier décrit d'un trait simple et continu.

De combien de manières différentes, formées d'un ou plusieurs traits, un tel réseau peut-il être décrit? Si l'on ne tient pas compte des symétries que le réseau peut présenter et si l'on suppose qu'il comprend  $s_2$  sommets d'où partent 2 arêtes,  $s_4$  sommets d'où partent 4 arêtes, ...,  $s_{2k}$  sommets d'où partent  $2k$  arêtes, Brunel montre (LXXII) que le nombre de manières distinctes de décrire le réseau est représenté par la formule

$$\prod_{p=1}^{p=\infty} \left[ \frac{(2p)!}{p! 2^p} \right]^{s_{2p}}$$

Si l'on considère, par exemple, un jeu de dominos dont on a ôté les doubles, et si l'on se propose de le grouper en un ou plusieurs cycles fermés, on trouve que le problème admet 170 859 375 solutions.

Le nombre des cycles linéairement indépendants que l'on peut tracer en un réseau connexe qui compte A arêtes et S sommets est

$$\lambda = A - S + 1.$$

Lorsque  $\lambda = 0$ , on ne peut tracer dans le réseau aucun cycle fermé; on dit alors que le réseau est une *ramification*.

Dans un mémoire de grande importance, inséré au journal de Crelle en 1869, M. C. Jordan a démontré, au sujet des ramifications, plusieurs théorèmes essentiels.

Considérons une ramification qui compte S sommets et A arêtes; soit  $\tau$  un de ses sommets; de ce sommet partent  $m$  arêtes; chacune de ces arêtes est le point de départ d'une ramification; les ramifications issues des arêtes 1, 2, ...,  $m$  comptent respectivement  $p_1$ ,  $p_2$ , ...,  $p_m$  arêtes; on a évidemment

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = A.$$

Soit  $\pi$  le plus grand des nombres  $p_1$ ,  $p_2$ , ...,  $p_m$ .

Toutes les ramifications peuvent, dès lors, se ranger en deux catégories.

Pour les ramifications de la première catégorie, il existe un sommet

$\Sigma$  où  $\varpi$  est au plus égal à  $\frac{A}{2}$ ; en tous les autres sommets,  $\varpi$  surpasse  $\frac{A+1}{2}$ ; le sommet  $\Sigma$  est *centre de nombre* de la ramification.

Pour les ramifications de la seconde catégorie, il existe deux sommets consécutifs,  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , où  $\varpi = \frac{A+1}{2}$ ; en tous les autres sommets,  $\varpi$  surpasse  $\frac{A+1}{2}$ ; les sommets  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sont les *bicentres de nombre* de la ramification.

À côté des centres et bicentres de nombre, il y a lieu de considérer d'autres sommets fort importants, que l'on peut nommer *centres* et *bicentres de hauteur*; voici comment on peut définir ces points remarquables :

En toute ramification, il existe des sommets terminaux d'où part une seule arête; supprimons-les; opérons de même sur la nouvelle configuration, et ainsi de suite; nécessairement, nous parviendrons ainsi ou bien à un sommet unique C, origine de deux ou plusieurs arêtes, ou bien à une arête unique joignant les sommets  $C_1, C_2$ ; dans le premier cas, la ramification admet le sommet C pour *centre de hauteur*; dans le second cas, elle admet les sommets  $C_1, C_2$  pour *bicentres de hauteur*.

Ces notions de centres et de bicentres jouent un rôle essentiel lorsqu'il s'agit de construire une ramification présentant des caractères topologiques donnés, problème qui se pose dans l'étude de diverses sciences, et particulièrement en chimie organique.

Considérons, par exemple, cette question, suite naturelle des travaux de M. Kékulé : *Construire les formules développées de tous les isomères des carbures d'hydrogène saturés, à chaîne ouverte, renfermant n atomes de carbone*. Ce problème équivaut à celui-ci : Construire une ramification dans laquelle  $n$  sommets, les sommets C, servent de point de départ à 4 arêtes, tandis que  $p$  sommets, les sommets H, donnent naissance à une seule arête. Les propriétés élémentaires des ramifications donnent sans peine  $p = 2n + 2$ , en sorte que les carbures étudiés ont nécessairement pour formule  $C^n H^{2n+2}$ .

Cayley s'est proposé le premier la construction et l'énumération de toutes les formules développées auxquelles correspond une semblable formule brute; sa méthode, que M. Delannoy a exposée dans le *Bulletin de la Société chimique*, repose sur la considération des cen-

tres et bicentres de hauteur; elle montre que pour un nombre  $n$  d'atomes de carbone égal, respectivement, à

1    2    3    4    5    6    7    8    9    10    11    12    13

on obtient un nombre d'isomères égal à

1    1    1    2    3    5    9    18    35    75    159    355    802.

La méthode de Cayley conduit à des calculs extrêmement pénibles; la solution du problème est grandement facilitée lorsque, avec Brunel (LI), on substitue la considération des centres et des bicentres de nombre à celle des centres et des bicentres de hauteur, substitution déjà indiquée par Cayley dans une question différente.

Cette méthode lui a permis de vérifier les nombres de Cayley et de pousser plus loin, malgré l'accroissement rapide du nombre des isomères. Il a montré que les carbures saturés à chaîne ouverte qui comptent 14, 15 et 16 atomes de carbone peuvent fournir respectivement 1858, 3991 et 10339 isomères; enfin, pour les paraffines, qui comptent 27 atomes de carbone, le nombre des isomères possibles est 234 172 832.

Les mêmes procédés réussissent toutes les fois que l'on a à construire une ramification présentant des caractères topologiques donnés; notamment, ils conduisent à la solution (LII) du problème suivant, que Kirkman avait posé dès 1855 : Construire tous les polyèdres de  $n$  faces qui ont pour base un polygone de  $(n - 1)$  côtés, et dont tous les sommets servent de point de départ à 3 arêtes.

En effet, si l'on considère un polyèdre de cette nature, et que l'on suppose supprimées les arêtes qui forment les côtés de la base, les autres arêtes constituent une ramification à sommets trilatéraux. Inversement toute ramification simplement connexe à sommets trilatéraux fournit un polyèdre de Kirkman.

La considération des centres et des bicentres de nombre permet la construction de la ramification qui résout le problème. La solution a été formée pour toutes les valeurs du nombre  $n$  qui ne surpassent pas 18; pour  $n = 18$ , il existe 285 357 polyèdres de Kirkman.

Il peut arriver que l'on ait à construire des réseaux non réductibles à des ramifications. Brunel a examiné et résolu divers problèmes de ce genre. Le plus remarquable consiste à construire toutes les for-

mules développées compatibles avec la formule brute  $C^6H^6$ , qui est celle de la benzine.

Les *Procès-verbaux* de la Société des Sciences de Bordeaux se contentent (XL) de mentionner le problème; les notes recueillies par les auditeurs de Brunel nous permettent d'y joindre quelques indications qui sont précieuses.

La configuration étudiée comprend six sommets quadrilatères (les six atomes de carbone) et six sommets unilatères (les six atomes d'hydrogène); elle comprend donc 15 arêtes et l'on y peut tracer 4 circuits fermés linéairement indépendants.

Si l'on supprime les six arêtes qui aboutissent aux sommets unilatères, il reste une configuration formée de 6 sommets et de 9 arêtes, et il suffit évidemment de construire cette configuration; le nombre  $n$  des arêtes qui manquent à chaque sommet restant pour redevenir quadrilatère est égal à 0, 1, 2 ou 3; d'ailleurs, on doit avoir

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 6.$$

On est amené ainsi à partager le nombre 6 en 6 nombres respectivement égaux à 0, 1, 2 ou 3. Cette partition peut se faire de 7 manières différentes, ce qui décompose le problème proposé en 7 autres problèmes et, par là, en facilite grandement la solution.

De nouvelles simplifications se présentent toutes les fois que le nombre 2 figure dans le mode de décomposition du nombre 6 que l'on étudie, c'est-à-dire toutes les fois que la configuration à construire présente un sommet bilatéral; en effet, si l'on supprime un tel sommet, les deux arêtes qui y aboutissent forment une seule arête; on peut donc construire d'abord la configuration où ce sommet est supposé supprimé; puis, de toutes les manières possibles, placer le sommet supprimé sur une arête, qu'il partagera en deux arêtes.

Brunel est parvenu de la sorte à construire les 919 formules développées distinctes qui correspondent à la seule formule brute  $C^6H^6$ ; un tableau présentant ces 919 formules (LXV) a figuré à l'Exposition universelle ouverte à Bordeaux en 1895. C'est assurément chose digne de remarque que les chimistes aient pu, en faisant usage d'observations décisives, déterminer sans ambiguïté celle de ces 919 formules qui convient à la benzine.

Ce beau problème, qui consiste à construire et à énumérer tous les isomères correspondant à une formule chimique donnée, n'a cessé

d'occuper Brunel; pour le résoudre, il a posé des principes généraux (LXXXIX), extension de ceux qu'il avait appliqués dans les cas précédents.

D'un réseau donné, on déduit un autre réseau plus simple par les deux procédés suivants : 1° si un sommet est monovalent, on supprime ce sommet et l'arête unique qui y aboutit; 2° si un sommet est bivalent, on le supprime en laissant subsister les deux arêtes qui aboutissaient en ce sommet et qui n'en forment plus qu'une seule.

L'emploi de ces deux procédés de réduction, qui laisse inaltérée la différence entre le nombre des arêtes et le nombre des sommets, conduit à un réseau final que l'on peut nommer le *squelette* du réseau étudié; ce squelette ne renferme ni sommet monovalent, ni sommet bivalent.

Le squelette d'un réseau une fois construit, on obtiendra le réseau en attachant, en divers points du squelette, les *racines* de certaines *ramifications*.

Brunel a fait usage de ces principes pour construire les formules développées, sans autoliasion, des carbures éthyléniques  $C^nH^{2n}$  et des carbures acétyléniques  $C^nH^{2n-2}$ .

A un carbure éthylénique de formule brute donnée correspond un seul squelette possible; pour les valeurs

2    3    4    5    6    7    8

de  $n$ , le nombre des isomères possibles est, respectivement, de

1    2    5    10    25    56    139

Trois squelettes distincts peuvent correspondre à un même carbure acétylénique de formule brute donnée; pour les valeurs

2    3    4    5

du nombre  $n$  d'atomes de carbone, de tels composés peuvent offrir, respectivement,

1    3    9    26

formes isomériques distinctes.

La détermination de tous les polymères possibles de carbone (LVII) se rapproche, par son objet, des problèmes dont nous venons de traiter; mais, d'autre part, elle se relie à l'étude des réseaux réguliers qui nous occupera tout à l'heure.

C'est encore à la construction de réseaux offrant des caractères topologiques donnés que Brunel ramène la solution de deux problèmes difficiles.

Le premier (LX) avait été rencontré par M. Hadamard en cherchant une représentation symbolique du résultant de deux équations; le voici :

Deux séries de  $n$  points,  $1, 2, 3, \dots, n$  et  $1', 2', 3', \dots, n'$ , sont telles que chaque point de chaque série donne naissance à deux arêtes aboutissant soit à un seul point, soit à deux points de l'autre série; quel est le nombre des configurations distinctes correspondant à une valeur déterminée de  $n$ ?

Deux configurations sont regardées comme identiques lorsque, par des permutations opérées sur les chiffres  $1, 2, \dots, n$  et  $1', 2', \dots, n'$  de la seconde figure, on obtient une configuration où les liaisons se succèdent dans l'ordre présenté par la première figure.

Le second problème (XC) avait été posé par M. E. Lemoine (1) dans les termes suivants :

« Je considère sur une carte, *d'un côté* : 1° un groupe A de  $n$  villes :  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , appartenant à une même nation; 2° un groupe A' de  $n$  villes  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ , appartenant à une autre nation sans frontières communes avec la première; *d'un autre côté*, un groupe B de  $p$  villes :  $B_1, B_2, \dots, B_p$  situées dans les nations qui séparent les premières. »

« Je veux relier les villes A aux villes A' par  $n$  chemins  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tracés dans les conditions suivantes :  $a_j$  part de la ville  $A_j$ , aboutit à une quelconque des villes A' et ne peut passer ni par d'autre ville A que  $A_j$ , ni par d'autre ville A' que celle à laquelle il aboutit;  $a_j$  passe par 0, 1, 2, 3 ... des villes B; mais par aucune des villes B ne peut passer plus d'un chemin  $a$ . »

« J'appelle *communication complète* un groupe de  $n$  chemins  $a$  par lesquels toutes les villes A et toutes les villes A' sont reliées deux à deux une fois. »

« De combien de manières peut-on faire la communication complète? »

« Je considère comme différents les chemins qui, quoique passant par les mêmes villes B, y passent dans un ordre différent. »

(1) E. LEMOINE, *Intermédiaire des Mathématiciens*, t. VI, p. 51; 1899.

Un intérêt tout spécial s'attache à la construction des *réseaux réguliers* qui, comme nous le verrons en la section suivante, se relie à d'importantes questions d'analyse combinatoire.

Un réseau régulier est un réseau tel que chaque sommet donne naissance à un même nombre d'arêtes.

Si l'on désigne par  $A$  le nombre des arêtes du réseau, par  $S$  le nombre des sommets, par  $n$  le nombre des arêtes issues de chaque sommet, enfin par  $\lambda$  le nombre des contours indépendants que l'on peut tracer dans le réseau, on a (LVI)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & n-2 & 1 & \lambda-2 \\ A - & \lambda-1 & n & & S - & 2(\lambda-1) \end{array}$$

L'étude de ces équations entre nombres entiers montre que, pour toute valeur de  $\lambda$  supérieure à 2, il existe autant de types de solutions que le nombre  $2(\lambda - 1)$  admet de diviseurs; il existe donc au moins quatre types de solutions correspondant aux diviseurs 1, 2,  $(\lambda - 1)$ ,  $(2\lambda - 1)$ , et ce sont les seuls qui existent lorsque  $(\lambda - 1)$  est premier.

D'ailleurs, il peut arriver qu'un système de valeurs entières de  $\lambda$ ,  $A$ ,  $S$ ,  $n$  vérifiant les égalités précédentes ne corresponde à aucun réseau effectif; il peut arriver aussi qu'il fournisse plusieurs réseaux distincts.

Dans la question précédente, donnons à  $n$  la valeur 4; elle prend alors cette forme: Construire un réseau tel que de chaque sommet partent quatre arêtes. Cette question peut se traduire ainsi en langage chimique: *Déterminer les formules figurées des divers polymères que peut former le carbone quadrivalent* (LVII).

Selon que l'on prend 1, 2, 3 ou 4 atomes de carbone, on obtient 1, 2, 4, ou 10 polymères différents.

II. CONTOURS PASSANT PAR TOUS LES SOMMETS D'UN RÉSEAU. — Nous arrivons maintenant à l'analyse d'un travail qui joue, dans l'œuvre de Brunel, un rôle capital.

Un grand nombre de questions relatives aux réseaux ou à l'analyse combinatoire se peuvent ramener au problème suivant: *Déterminer tous les trajets que l'on peut décrire en un réseau de manière à passer par tous les sommets*. C'est de ce problème, inabordé avant lui, que Brunel donna la solution complète; cette solution lui permit ensuite de résoudre une foule de questions.



La méthode dont il a fait usage s'est présentée à lui en étudiant, après Kirchhoff, la distribution des courants dans un réseau de fils qui ont des résistances données et qui renferment des forces électromotrices données (XXXII).

Rappelons de quelle manière on met ce problème en équations.

On considère un quelconque des trajets fermés indépendants que l'on peut tracer dans le réseau; si  $R$  désigne la résistance d'une branche du circuit,  $J$  l'intensité du courant qui la traverse,  $E$  la force électromotrice qu'elle renferme, on a

$$\sum RJ = \sum E,$$

les deux sommes s'étendant à toutes les branches du circuit.

Ce sont ces équations que l'on résout par rapport aux intensités  $J$ . Considérons la forme de la solution obtenue.

Si nous désignons par  $A$  le nombre des arêtes du réseau, par  $S$  le nombre des sommets et par  $\lambda = A - S + 1$  le nombre des trajets indépendants que l'on peut décrire dans le réseau, le dénominateur commun est la somme des combinaisons  $\lambda$  à  $\lambda$  des résistances des différentes branches, ces combinaisons étant formées de telle manière que si l'on supprime toutes les branches qui figurent dans l'une quelconque d'entre elles, le réseau ne présente plus aucun circuit fermé.

Le numérateur de  $J_k$  est une somme de termes. Chacun de ces termes est un produit de deux facteurs; le premier facteur est une combinaison de résistances  $(\lambda - 1)$  à  $(\lambda - 1)$ , combinaison telle que si l'on supprime les branches auxquelles correspondent ces résistances, le réseau ne présente plus qu'un seul circuit fermé; le second facteur est la somme des forces électromotrices dans ce circuit fermé.

La solution du problème de Kirchhoff est donc intimement liée à la détermination de tous les trajets indépendants que l'on peut tracer en un réseau. Elle fait apparaître des liens inattendus entre la théorie des réseaux et la théorie des déterminants.

D'emblée, Brunel aperçoit les affinités du problème de Kirchhoff avec d'autres problèmes d'*analysis situs*, notamment avec la détermination de tous les trajets capables de faire parcourir au cavalier toutes les cases de l'échiquier. Aussi, en communiquant ces remarques à la Société des Sciences de Bordeaux (séance du 11 juin 1891), n'hésite-t-il pas à conclure par ces paroles: « D'une façon générale, on peut

dire que la méthode précédente donne la clef de la théorie des réseaux. »

En effet, le 12 janvier 1893, il communiquait à la même Société (XXXIX) le travail qui fut inséré dans ses *Mémoires* sous le titre : ANALYSIS SITUS; *Recherches sur les Réseaux* (LV). Résumons brièvement la méthode exposée dans ce travail.

Un réseau étant donné, distinguons les différents sommets par des chiffres 1, 2, 3, 4... Si l'on désigne par S le nombre des sommets, on forme un tableau à double entrée contenant S lignes et S colonnes. Chacune des lignes et chacune des colonnes est affectée à l'un des sommets et porte un indice caractéristique; si, par exemple, le point d'indice  $p$  est relié par une arête au point d'indice  $q$ , on insère dans la  $p^{\text{e}}$  ligne et dans la  $q^{\text{e}}$  colonne l'indice  $pq$ ; de même, dans la  $q^{\text{e}}$  ligne et dans la  $p^{\text{e}}$  colonne, on insère l'indice  $qp$ . Si les deux sommets  $pq$  étaient reliés par plus d'une arête, on aurait recours à un symbole à plusieurs termes :

$$(pq)_1 + (pq)_2 + (pq)_3 + \dots$$

Si les deux sommets  $p, q$  ne sont pas reliés entre eux, les cases considérées restent vides. Si un sommet est relié à lui-même par une autoliasion, il figure dans une case de la diagonale principale.

A chaque réseau correspond un semblable tableau; à chaque tableau semblable correspond un réseau.

Supposons que l'on développe ce tableau comme un déterminant. On verra sans peine que chaque terme du déterminant est une somme de produits symboliques dont chaque facteur est une arête; que chacun de ces produits symboliques représente un trajet simple, passant par tous les sommets du réseau; enfin que tout trajet qui passe par tous les sommets du réseau figure au nombre de ces produits symboliques.

La détermination de tous les trajets simples qui passent par les S sommets d'un réseau se ramène donc au développement d'un déterminant de  $S^2$  éléments. L'opération peut être longue, mais elle ne présente ni difficulté, ni indétermination.

L'avantage du lien qui se trouve ainsi établi entre la théorie des réseaux et la théorie des déterminants apparaît d'une manière bien particulière dans l'étude des réseaux dont le nombre des sommets est pair et qui ne contiennent pas d'autoliasion.

Convenons de considérer les deux symboles  $p q$  et  $q p$  comme deux quantités de même valeur absolue et de signes contraires; le tableau figuratif du réseau deviendra un déterminant symétrique gauche et d'ordre pair.

Or, d'importants théorèmes ont été donnés par Jacobi et par Cayley touchant ces déterminants; selon ces théorèmes, le déterminant qui nous intéresse sera entièrement déterminé lorsque nous connaîtrons une expression algébrique formée, à la manière d'un terme, avec les éléments qui figurent soit au-dessus, soit au-dessous de la diagonale principale, et où apparaissent une et une seule fois tous les indices 1, 2, ..., S.

Or, cette expression qui suffit à définir le déterminant, qui, par conséquent, fixe tous les trajets capables de relier entre eux tous les sommets du réseau, que représente-t-elle au point de vue de la théorie des réseaux? Elle représente un ensemble de  $k$  arêtes  $p q$  tel que les  $2k = S$  symboles correspondant aux différents sommets apparaissent tous, et chacun d'eux une seule fois, dans cet ensemble. Un tel ensemble d'arêtes constitue ce que Brunel nomme un *demi-trajet*. On voit, dès lors, que la connaissance d'un demi-trajet détermine tous les trajets qui, dans un réseau, réunissent tous les sommets.

Cette proposition n'épuise pas la fécondité de la notion des *demi-trajets*.

La connaissance des divers demi-trajets relatifs à un réseau dont les sommets sont en nombre pair conduit immédiatement à la solution du problème suivant : Passer par tous les sommets du réseau au moyen d'un seul trajet fermé contenant un nombre pair d'arêtes ou de plusieurs trajets fermés dont chacun se compose d'un nombre pair d'arêtes.

On obtient, en effet, la solution du problème en prenant tous les produits symboliques de deux demi-trajets qui n'ont aucun élément commun.

La construction de tous les demi-trajets qui se rapportent à un réseau donné apparaît, dès lors, comme le premier problème à résoudre dans l'étude de ce réseau. Mais ce problème, à son tour, peut toujours se résoudre par voie de récurrence; la construction des demi-trajets d'un réseau donné se ramène à la construction des demi-trajets pour un réseau de plus en plus simple.

Cette belle méthode conduit Brunel à la solution de problèmes

nombreux et cachés; une seule difficulté subsiste dans cette solution : la longueur des calculs à développer. Passons en revue quelques-uns de ces problèmes.

L'un des plus anciennement posés consiste à colorier une carte géographique avec un nombre déterminé de couleurs, de telle sorte que deux pays qui confinent l'un à l'autre ne présentent jamais la même teinte. On peut toujours supposer que le nombre des frontières qui se rencontrent en un même point ne surpasse pas 3.

On savait, depuis longtemps, que le problème n'admet pas, en général, de solution, si l'on ne dispose que de trois couleurs; on avait également montré que, si l'on fait usage de quatre couleurs, le problème se ramène au suivant : affecter chacune des diverses frontières de l'un des trois indices  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , en sorte que les trois frontières aboutissant à un même sommet portent la première l'indice  $\lambda$ , la seconde l'indice  $\mu$ , la troisième l'indice  $\nu$ . Mais le problème ainsi transformé admet-il toujours des solutions? A cette question, laissée en suspens, la méthode de Brunel répond en montrant qu'il existe toujours des solutions (XXII) et en donnant le moyen de les former toutes (LV).

Dans l'*Educational Times*, Kirkman a décrit un certain polyèdre (XLVIII) à 46 sommets; par tâtonnements, il a formé quelques trajets passant par tous les sommets de ce polyèdre et annoncé que le nombre total de ces trajets était 44.

La méthode de Brunel permet de tracer tous les trajets qui passent par tous les sommets du polyèdre; on trouve qu'il existe :

180 trajets d'un seul trait,  
236 trajets de deux traits,  
30 trajets de trois traits,  
15 trajets de quatre traits.

Brunel présenta à la Société des Sciences de Bordeaux, dans sa séance du 8 mars 1894, le dessin de ces différents trajets.

Nul sujet, peut-être, n'a plus ardemment sollicité l'attention des esprits aptes à l'*ars combinatoria* que la marche suivie, sur l'échiquier par les diverses pièces et, notamment, par le cavalier; d'Euler à M. C. Jordan, il n'en est guère qui n'aient cherché, dans cette particularité du jeu d'échecs, de beaux et difficiles problèmes. La méthode

de Brunel permet d'en résoudre plusieurs sans autre peine que celle de développer des déterminants à nombreux éléments.

Si l'on veut, par exemple, déterminer tous les trajets fermés, formés d'un seul trait ou de plusieurs traits, qui passent par toutes les cases de l'échiquier, on sera ramené à l'étude d'un déterminant de 64 éléments; la considération des demi-trajets simplifierait d'ailleurs cette étude (LV).

Euler a donné un saut du cavalier qui jouit d'une propriété remarquable; la moitié supérieure du tracé s'obtient en faisant tourner la moitié inférieure de  $180^\circ$  autour du centre de l'échiquier. Connaissant donc la moitié inférieure du trajet tracé par Euler, la méthode précédente fournit un moyen de compléter le trajet; ne pourrait-on le compléter de quelque autre manière?

La méthode de Brunel se prête à la solution de cette difficile question (LV); la formation de 218 demi-trajets fondamentaux, partagés en quatre classes, conduit à la détermination de tous les trajets complets décrits en un, deux, trois, quatre ou cinq traits.

Cette méthode se prête également à un grand nombre d'autres problèmes où l'on se propose de compléter un saut du cavalier dont une partie a été détruite (L).

C'est encore par l'emploi de procédés analogues que Brunel est parvenu à déterminer tous les trajets du cavalier qui ne changent pas par une rotation de  $90^\circ$  autour du centre de l'échiquier (XLIV). Parmi ces trajets, il en est 28 qui se reproduisent par réflexion sur une diagonale de l'échiquier; les dessins de ces 28 trajets ont figuré, en 1895, à l'Exposition universelle de Bordeaux (LXV). Les grecques, qui étaient exposées à côté de ces dessins, avaient été obtenues de semblable façon.

Ce n'est plus le cavalier, mais l'échiquier lui-même, qui fournit le problème suivant :

Étant donné un échiquier de  $4n^2$  cases, on se propose de le découper en quatre morceaux superposables, les bords de chacun de ces morceaux étant formés des côtés des cases de l'échiquier et la décomposition étant telle que les divers sommets de l'échiquier figurent sur les bords limites des diverses parties.

Les solutions de diverses catégories que l'on peut donner de ce problème s'obtiendront par la méthode féconde que nous venons d'analyser (LXXX).

**IV. RÉSEAUX PRÉSENTANT DES ARÊTES IRRÉVERSIBLES.** — Dans ce qui précède, nous avons supposé que la liaison entre deux sommets  $p$  et  $q$  du réseau ne comportait pas l'idée de *sens*; l'arête par laquelle s'effectue cette liaison pouvait être parcourue aussi bien de  $p$  vers  $q$  que de  $q$  vers  $p$ ; elle était essentiellement *réversible*.

Il est, au contraire, des questions où, entre des objets, que l'on peut figurer par les sommets d'un réseau, sont établies des relations dont le sens n'est pas indifférent. Cela a lieu, par exemple, lorsque l'on veut représenter les relations de parenté qui existent entre les hommes; si l'on veut exprimer, en traçant une arête entre les sommets  $p$  et  $q$  qui représentent deux personnes, que  $p$  est enfant de  $q$ , l'arête ne pourra être parcourue que de  $p$  vers  $q$  et non de  $q$  vers  $p$ ; elle sera *irréversible*; au contraire, une arête exprimant que  $p$  et  $q$  sont conjoints sera réversible.

Un réseau qui renferme des arêtes irréversibles pourra encore être représenté par un tableau à double entrée; seulement, ce tableau ne sera plus symétrique par rapport à la diagonale principale.

La considération d'un tel tableau rend de grands services dans l'analyse des relations de parenté; elle permet de résoudre un grand nombre de questions paradoxales (XLI) dont le type est représenté par le vicil adage latin : *Patruus ego tibi sum, tu mihi*, ou bien encore par la phrase : *Le frère de mon oncle est l'oncle de mon frère*.

Voici un tout autre problème où se présentent également des liaisons qui ne peuvent être parcourues que dans un sens déterminé :

On a 3 vases qui contiennent respectivement 8, 5 et 3 litres; le premier est plein de vin; effectuer, de l'un de ces vases à l'autre, des transvasements tels qu'il y ait finalement 4 litres de vin dans le premier et 4 litres de vin dans le second.

Le développement (XLVII) du tableau des liaisons fournit les 16 solutions dont le problème est susceptible.

## SECTION 7. — Analysis situs et Analyse combinatoire.

L'*analysis situs* et, en particulier, l'étude des réseaux, sont en relation très étroite avec divers problèmes d'analyse combinatoire.

Les combinaisons de  $N$  lettres  $v$  à  $v$  sont souvent dénommées *v-ades*; ainsi, selon que ces combinaisons sont formées deux à deux,

trois à trois, quatre à quatre, elles constituent des duades, des triades, des tétrades.

En 1847, dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, Kirkman avait posé le problème suivant : Avec  $N$  éléments, on forme des triades ; les éléments qui entrent dans une triade pourraient fournir certaines duades ; on dit que ces duades figurent dans la triade considérée ; on demande quel est le nombre maximum  $Q$  de triades que l'on peut former, si l'on exige qu'une même duade ne figure pas deux fois dans l'ensemble de ces  $Q$  triades.

En réponse à cette question, Kirkman avait formulé la proposition suivante :

Le nombre  $Q$  est donné par l'expression

$$3Q = \frac{N(N-1)}{2} - V,$$

où l'on a

- (1)  $V = 6k + 4$  pour  $N = 6n - 1$ ,
- (2)  $V = \frac{N}{2} + 3k + 1$  pour  $N = 6n - 2$ ,
- (3)  $V = 0$  pour  $N = 6n + 1$  et  $N = 6n + 3$ ,
- (4)  $V = \frac{N}{2}$  pour  $N = 6n$  et  $N = 6n + 2$ ,

en posant

$$n = 2^m(2k + 1).$$

Les proportions relatives aux cas (1) et (2) ne sont pas, de la part de Kirkman, l'objet d'une démonstration rigoureuse ; il établit l'existence de triades remplissant les conditions de l'énoncé et dont le nombre est donné par la précédente formule ; mais il n'établit pas que ce nombre soit le plus grand possible. Il donne quelques raisons, mais il ajoute qu'elles sont insuffisantes pour entraîner la conviction et qu'elles « manquent de rigueur mathématique ». Il conclut en disant qu'il croit à la vérité de la proposition jusqu'à ce qu'on lui ait montré des cas où elle ne s'applique pas.

C'est ce démenti, attendu par Kirkman, que Brunel a apporté ; il a prouvé (LXX) que pour

$$N = 16, 17, 28, 29,$$

on a, en réalité,

$$Q = 37, 44, 121, 134,$$

tandis que les règles énoncées par Kirkman donnent

$$Q = 36, 42, 119, 130.$$

Il a montré, en outre, comment on devait, pour les cas (1) et (2), modifier la règle de Kirkman. On a

$$V = 4 \quad \text{pour } N = 6n - 1,$$

$$V = \frac{N}{2} + 1 \quad \text{pour } N = 6n - 2.$$

Le nombre  $k$  n'a plus à figurer dans l'énoncé de cette règle.

Peut-on, avec  $N$  éléments, composer un ensemble de triades tel que chacune des duades que l'on peut former avec les éléments considérés apparaisse dans l'ensemble une fois et une fois seulement? Cette question fut posée par Kirkman en 1847, en même temps que la précédente.

Kirkman montra qu'on ne peut former de tels ensembles de triades, épuisant toutes les duades, que si  $N$  a l'une des formes

$$N = 6n + 1, \quad N = 6n + 3.$$

D'ailleurs, si  $N$  est de cette forme, on peut toujours, en suivant un procédé indiqué par Kirkman et retrouvé, sous une forme plus explicite, par Reiss, former un tel système de triades.

M. Netto, reprenant le problème par une autre voie, a obtenu des résultats moins généraux; mais, dans certains cas, sa méthode fournit des systèmes distincts de ceux que l'on emploie par le procédé de Kirkman-Reiss. M. Hastings Moore a développé la méthode de M. Netto et a retrouvé par cette voie le théorème déjà démontré par Kirkman et par Reiss: Toutes les fois que le nombre  $N$  est de la forme  $(6n + 1)$  ou de la forme  $(6n + 3)$ , on peut construire un système de triades où chaque duade figure une et une seule fois.

Dans le cas où  $N = 7$  et dans le cas où  $N = 9$ , il existe un seul système de triades épuisant toutes les duades. D'autre part, pour les valeurs de  $N$  qui sont au moins égales à 15, Hastings Moore a montré qu'il existe au moins deux systèmes distincts de triades épuisant toutes les duades. Ce nombre 2, d'ailleurs, n'est qu'un minimum; déjà, pour



$N = 15$ , Brunel a montré (LIII) qu'il existe bien plus de deux tels systèmes de triades.

Qu'arrive-t-il dans le cas où  $N = 13$ ? M. Netto et M. Hastings Moore étaient portés à croire qu'il existait effectivement, dans ce cas, un seul système de triades. En revanche, M. Jan de Vries a signalé l'existence d'un système de triades de 13 éléments, distinct de celui que M. Netto avait construit; il ajoute qu'il ne saurait prouver que les deux systèmes ainsi obtenus sont les seuls possibles.

Le groupement de 13 éléments en systèmes de triades tels que chaque duade figure une et une seule fois dans un même système a été repris par Brunel (XCVII); il a appliqué à ce problème sa belle et féconde méthode, fondée sur la considération des demi-trajets, et il a obtenu une solution complète de cette question difficile :

Le groupement des 13 éléments en un système de triades peut se faire de deux manières distinctes et de deux manières seulement. L'un des deux systèmes est celui qu'a formé M. Netto; l'autre système est fourni par le procédé de Kirkman-Reiss; le système formé par M. Jan de Vries est réductible à ce dernier.

En étudiant le groupement en triades de  $(6n + 1)$  éléments,  $(6n + 1)$  étant premier, Netto a fait une remarque curieuse :

Le nombre total des duades que l'on peut former avec  $(6n + 1)$  éléments est égal à  $\frac{(6n + 1) 6n}{2}$  et, comme trois duades figurent dans une triade, le nombre des triades qui forment un des systèmes précédemment définis est

$$(6n + 1)n.$$

Netto a montré que, dans le cas où le nombre  $(6n + 1)$  est premier, on peut partager ces triades en  $n$  cycles de  $(6n + 1)$  triades, chaque cycle jouissant de la propriété suivante :

Représentons les éléments par les nombres 0, 1, 2, ...,  $6n$ . Pour former toutes les triades d'un même cycle, il suffit de prendre l'une d'entre elles, d'augmenter d'un même nombre quelconque les trois nombres qui la composent et de prendre les résidus, relativement au module  $(6n + 1)$ , des résultats obtenus.

Brunel a montré (LXVI) que le théorème de Netto pouvait demeurer vrai pour des valeurs non premières de  $(6n + 1)$ ; il a donné des systèmes complets de triades, résolubles en  $n$  cycles, pour toutes les valeurs de  $n$  depuis  $n = 1$  jusqu'à  $n = 8$ . Mais il ajoute, en terminant

son mémoire : « Nous ne savons pas d'avance si une telle subdivision existe, et même nous ne voyons pas d'autre mode de démonstration de son existence que sa constitution effective. »

Le problème qui consiste à grouper, sans omission ni répétition, toutes les duades de  $N$  éléments en un système de triades, est susceptible d'une belle généralisation, découverte par Brunel (LXXI).

Si nous figurons les éléments par des points et les duades par des lignes joignant ces points deux à deux, le système de duades considéré est représenté par un réseau. Le problème de la construction d'un système de triades revient à la construction d'un ensemble de triangles dont les côtés sont des arêtes du réseau, une arête apparaissant dans l'un des triangles, mais dans un seul triangle.

Ainsi considéré, le problème se prête à une généralisation : Le réseau des duades de  $N$  éléments peut-il être obtenu, sans omission ni répétition d'arêtes, en traçant soit un système de quadrilatères, soit un système de pentagones, soit un système d'hexagones, ...?

Nous appellerons *quadricycle* une figure  $abcd$  contenant quatre côtés consécutifs du réseau  $ab, bc, cd, da$ .

Il n'y a pas lieu de parler de *tricycles*; ils sont identiques aux triades; mais il y aura lieu de considérer des *v-cycles*.

On démontre sans peine que pour que toutes les duades de  $N$  éléments puissent, sans omission ni répétition, se grouper en quadricycles, il faut que  $N$  soit de la forme

$$N = 8n + 1.$$

Le nombre des quadricycles qui forment un système est alors égal à  $(8n + 1)n$ .

Pour  $N = 9, 17, 25$ , Brunel a formé effectivement un système de quadricycles épuisant toutes les duades.

D'ailleurs, quel que soit  $n$ , on peut donner la loi de formation d'un tel système (LXXXVI); cette loi est fournie par le tableau

$$\begin{array}{cccc} a, & a + 2l - 1, & a + 4n + 1, & a + 2l, \\ & (a = 0, 1, 2, \dots, 8n,) & & \\ & (l = 1, 2, \dots, n.) & & \end{array}$$

Un tel système présente un mode de subdivision analogue à celui qui avait été découvert par Netto et généralisé par Brunel pour les systèmes de triades de  $(6n + 1)$  éléments.

Pour les diverses formes du nombre  $N$  autres que  $N = 8n + 1$ , la formation de quadricycles présente des particularités intéressantes.

On sait que l'on peut distribuer en triades ou tricycles les 21 duades formées avec 7 éléments; nous venons de voir également que l'on pouvait distribuer en quadricycles les 31 duades formées avec 9 éléments. Ces propositions peuvent se généraliser (LXXXVII) : On peut distribuer en un système de  $n$ -cycles les  $n(2n + 1)$  duades formées avec  $(2n + 1)$  éléments, de telle sorte que chaque duade figure une et une seule fois en un tel système. On peut même former un système à constitution circulaire, c'est-à-dire tel que les divers  $n$ -cycles se déduisent de l'un quelconque d'entre eux en ajoutant un même nombre à tous les éléments qui constituent ce dernier.

Les groupements en cycles ne sont pas les seuls groupements qui généralisent le problème des triades posé par Kirkman; on peut imaginer des généralisations bien différentes de celle-là (LXVII).

L'ensemble des duades de  $N$  éléments peut être, comme nous l'avons vu, figuré par un réseau; ce réseau est la configuration régulière la plus simple de l'espace à  $(N - 1)$  dimensions. Le problème de Kirkman consiste à chercher si cette configuration peut être formée, sans omission ni répétition d'arêtes, par des triangles, qui sont les configurations régulières les plus simples de l'espace à 2 dimensions.

Une première généralisation du problème est la suivante : La configuration régulière la plus simple de l'espace à  $(N - 1)$  dimensions peut-elle être formée, sans omission ni répétition d'arêtes, par un ensemble de configurations régulières les plus simples de l'espace à  $(P - 1)$  dimensions ( $P \leq N$ )?

Si l'on donne à  $P$  la valeur 3, on retrouve le problème de Kirkman; si l'on donne à  $P$  les valeurs 4, 5, 6, ..., on est conduit à des problèmes analogues où le mot *triade* est remplacé par les mots *tétrade*, *pentade*, *hexade*.

On trouve sans peine que le problème n'admet pas de solution si l'on n'a pas

$$N = n(P - 1) + 1,$$

$n$  étant un nombre entier; il faut en outre que  $\frac{N(N - 1)}{P(P - 1)}$  soit un nombre entier.

Il n'est d'ailleurs pas certain que ces conditions soient suffisantes.

Elles sont vérifiées si l'on a  $N = P^2$ ; dans ce cas, si  $P$  est, en outre,

un nombre premier, on peut assurément former un système de P-ades qui comprend toutes les duades de  $P^2$  éléments, et chacune d'elles une seule fois. Brunel donne (LXIII) une règle générale pour former ces systèmes; il l'applique effectivement au cas où  $N = 11$ .

Une autre généralisation (LXVII), qui comprend la précédente comme cas particulier, peut s'énoncer ainsi :

Le réseau régulier le plus simple de l'espace à  $(N - 1)$  dimensions peut-il être obtenu, sans omission ni répétition d'arêtes, au moyen de réseaux réguliers, tous du même type, appartenant à l'espace à  $(P - 1)$  dimensions?

Si l'on impose à ces derniers réseaux la condition d'être les plus simples possible, on retombe sur la généralisation précédente; si l'on donne à  $P$  la valeur 3, le problème consiste à grouper toutes les duades en triades, en quadricycles, en  $n$ -cycles, et l'on retrouve encore une question qui a été examinée plus haut.

Donnons à  $P$  la valeur 4; nous sommes amenés à nous demander si le réseau régulier le plus simple de l'espace à  $(N - 1)$  dimensions peut être obtenu, sans omission ni répétition d'arêtes, par l'assemblage de configurations régulières, toutes de même espèce, tracées dans l'espace à 3 dimensions.

Si ces configurations sont des *tétraèdres*, cas auquel elles sont les plus simples possible, nous retrouvons le problème du groupement de toutes les duades en tétrades.

Pour qu'elles puissent être des *cubes*, il faut que  $N$  ait l'une des deux formes

$$\begin{aligned} N &= 24n + 1, \\ N &= 24n + 16. \end{aligned}$$

Pour qu'elles puissent être des *octaèdres*, il faut que  $N$  soit donné par l'une des formules

$$\begin{aligned} N &= 24n + 1, \\ N &= 24n + 9. \end{aligned}$$

La possibilité de la décomposition en *dodécaèdres* exige l'une des conditions

$$\begin{aligned} N &= 60n + 1, \\ N &= 60n + 16, \\ N &= 60n + 25, \\ N &= 60n + 40, \end{aligned}$$

tandis que la décomposition en *icosaèdres* n'est possible que si  $N$  a l'une des formes

$$N = 60n + 1,$$

$$N = 60n + 16,$$

$$N = 60n + 21,$$

$$N = 60n + 36.$$

Ces conditions nécessaires ne sont d'ailleurs pas suffisantes; ainsi les duades de 9 éléments ne peuvent pas se grouper en octaèdres.

Ces généralisations diverses du problème de Kirkman font apparaître de bien étroites relations entre l'analyse combinatoire et la théorie des réseaux réguliers.

En 1852, Steiner a proposé un problème d'analyse combinatoire dont le problème de Kirkman constitue, pour ainsi dire, la première étape. Voici l'énoncé de ce problème :

*a)* Le nombre  $N$  étant convenablement choisi, quels sont les divers systèmes de triades qui contiennent toutes les duades que l'on peut former avec les  $N$  éléments, et chacune une seule fois?

*b)* On considère les triades de  $N$  éléments qui ne figurent pas dans un système (*a*), et l'on demande d'en former un système de tétrades où apparaisse chacune de ces triades, et l'une d'elles une fois seulement.

*c)* On considère les tétrades qui ne contiennent aucune triade figurant dans le système (*a*), qui sont distinctes des tétrades du système (*b*), et on demande d'en former un système de pentades où apparaisse chacune de ces tétrades, et l'une d'elles une fois seulement.

Et ainsi de suite.

De ce problème difficile et inabordable, Brunel a donné la solution effective pour les valeurs 7, 9 et 15 du nombre  $N$  (LXXVI).

Les liens qui unissent les questions d'analyse combinatoire à la théorie des réseaux réguliers les rattachent par là même à un problème de géométrie, le problème des *alignements*.

Dans l'*Educational Times*, Cayley et, plus particulièrement, Sylvestre ont posé une série de questions où il s'agissait de planter un certain nombre d'arbres de telle sorte que ces arbres soient distribués en même nombre sur une série de lignes droites. En particulier, Sylvestre a montré comment la théorie des courbes du 3<sup>e</sup> degré conduit à une solution simple et générale de ce problème : Planter 10 arbres de telle sorte que l'on puisse tracer 10 lignes droites dont chacune rencontre 3 arbres.

L'*analysis situs* permet d'aborder ce problème (XXIII); elle permet de former certaines solutions particulières qui ne rentrent pas dans la solution indiquée par Sylvestre. Il y a d'autres solutions générales qui se classent en séries, et, dans chaque série, en espèces variées.

Une solution remarquable s'obtient en projetant sur un plan un pentaèdre complet quelconque; les cinq plans qui le forment se coupent deux à deux suivant dix droites et trois à trois suivant 10 points tels que chaque droite porte 3 de ces points.

Cette solution conduit immédiatement à généraliser la question posée par Sylvestre; en projetant sur un plan la configuration formée par  $n$  plans dans l'espace, on obtient une solution du problème suivant : Planter  $\frac{(n-1)(n-2)}{3}$  arbres de telle sorte que l'on puisse tracer  $\frac{n(n-1)}{2}$  droites dont chacune rencontre  $(n-2)$  arbres.

Si l'on projette sur un plan la configuration formée par  $n$  plans dans un espace linéaire à  $p$  dimensions, on obtient une solution de ce problème encore plus général :

Planter  $\frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p}$  arbres de telle sorte que l'on puisse tracer  $\frac{n(n-1) \dots (n-p+2)}{p-1}$  droites dont chacune rencontre  $(n-p+1)$  arbres.

On peut compliquer le problème des alignements en exigeant que chaque arbre soit situé sur un même nombre de droites; on rencontre alors le problème des *alignements réguliers*, étudié en particulier par Kantor et par Jan de Vries.

Visiblement, un alignement régulier dont on déforme les droites d'une manière quelconque fournit un réseau régulier; l'étude des alignements réguliers se relie donc à l'étude des réseaux réguliers et, par là, à l'analyse combinatoire; mais celle-ci, en traçant un réseau régulier, fournit, pour l'existence d'un alignement régulier correspondant, des conditions nécessaires qui peuvent fort bien n'être pas suffisantes; Brunel en étudie un remarquable exemple (LXI); le groupement, sans omission ni répétition, des duades de 9 éléments en un système de triades semble conduire à la solution de ce problème : Placer 9 points 3 à 3 sur 12 droites, chacun des points étant situé sur 4 droites. La théorie des courbes du troisième ordre nous apprend que ce problème n'admet pas de solution si les 9 points sont réels.

Aux problèmes divers que nous venons de passer en revue se trouve étroitement reliée l'étude de l'*auto-inscription des polygones*.

Un polygone est auto-inscrit ou inscrit en lui-même (et, par suite, circonscrit à lui-même) lorsque tout sommet se trouve sur un côté autre que les deux côtés dont il est le point de rencontre.

Supposons d'abord que sur chaque côté du polygone se trouve un seul sommet, outre les deux sommets qui le terminent (LXIX). Nous trouvons alors, sur chaque côté du polygone, une triade de sommets. Si  $N$  est le nombre total de sommets, l'existence du polygone auto-inscrit correspond à l'existence d'un ensemble de triades qui possède les propriétés suivantes :

Une même duade ne se trouve pas deux fois dans cet ensemble ;

Si l'on connaît une triade de l'ensemble, on peut en déduire toutes les autres en augmentant d'un même nombre les indices des trois éléments de la première triade et en prenant les résidus, relativement au module  $N$ , des résultats obtenus.

Les conditions d'existence d'un pareil ensemble de triades sont donc des conditions nécessaires pour que l'on puisse tracer un polygone auto-inscrit de  $N$  sommets ; elles peuvent n'être pas suffisantes.

Ainsi, avec 7 ou 8 éléments, on peut former des systèmes de triades jouissant des propriétés indiquées ; cependant, il n'existe pas de polygones auto-inscrits de 7 côtés ou de 8 côtés.

Au contraire, on peut toujours tracer un polygone auto-inscrit de  $N$  côtés, lorsque  $N$  est décomposable en un produit de deux facteurs dont chacun est au moins égal à 3.

Un polygone est  $k$  fois auto-inscrit lorsque sur chacun des côtés du polygone, on trouve, outre les deux sommets qui le terminent,  $k$  autres sommets.

La théorie des alignements permet de former effectivement de tels polygones (LXXXIII) ; ainsi, en projetant sur un plan la configuration formée par 35 droites qui se rencontrent 4 à 4 en 35 points, de telle sorte que chaque droite porte 4 des 35 points, on obtient un polygone deux fois auto-inscrits.

Des considérations d'analyse combinatoire, analogues à celles que nous résumons il y a un instant, fournissent des conditions nécessaires pour l'existence de polygones  $k$  fois auto-inscrits.

Nous terminerons ces réflexions sur les travaux que Brunel a con-

sacrés à l'analyse combinatoire en mentionnant deux notes sur les *synthèmes de duades*.

Sylvestre a nommé *synthème* de  $2n$  éléments un ensemble de  $n$  duades distinctes où figure une et une seule fois chacun des éléments; un ensemble de synthèmes où figure une et une seule fois toutes les duades est un *total synthématique*.

De tels totaux peuvent être formés, quel que soit  $n$ , par un procédé dû à Kirkman et retrouvé par Reiss; ce procédé peut être présenté sous une forme géométrique (LXXXIV).

Le procédé de Kirkman-Reiss ne fournit, pour chaque valeur de  $n$ , qu'un seul total synthématique; on peut se proposer de former tous les totaux synthématiques relatifs à une valeur donnée de  $n$ ; la solution de cette question (LXII) s'obtient par la méthode qui fournit les trajets fermés passant par tous les sommets, en nombre pair, d'un réseau, lorsque l'on connaît les demi-trajets.

Pour  $n = 1, 2, 3$ , il n'existe qu'une forme de total synthématique; mais, pour  $n = 4$ , il existe 6 formes différentes de totaux synthématiques qui prennent respectivement, par les permutations effectuées sur les huit éléments, un nombre de déterminations égal à

$$30, \quad 630, \quad 420, \quad 2520, \quad 1680, \quad 960.$$

Ces totaux nous permettent de former des fonctions de 8 lettres admettant un nombre de valeurs égal à l'un de ceux-là.

Le premier des totaux synthématiques précédents peut être immédiatement généralisé; on retrouve ainsi ce théorème d'Émile Mathieu: Il existe des fonctions de  $2^p$  lettres ayant un nombre de valeurs égal à

$$\frac{(2^p - 1)!}{2^{\frac{(p-2)(p+1)}{2}} \prod_{k=1}^{p-2} (2^k - 1)}.$$

C'est là une nouvelle preuve de fécondité de la méthode inaugurée par Brunel dans son important mémoire sur les réseaux.

## SECTION 8. — Analysis situs — Configurations tracées sur des surfaces.

Les configurations auxquelles on donne le nom de *Réseaux* peuvent être déformées d'une manière quelconque; seuls, le nombre et l'ordre



des connexions établies entre leurs sommets demeurent invariables.

Une autre branche d'*analysis situs* étudie des configurations formées également de points et de lignes, mais qui, dans leurs déformations, ne peuvent quitter une surface. Dans l'œuvre de Brunel, les travaux relatifs à cette section de la topologie sont nombreux et importants.

Si  $x$  et  $y$  sont les coordonnées d'un point mobile sur une courbe fermée tracée en un plan et formée d'une seule boucle, l'intégrale  $\int y dx$ , dans laquelle le point  $(x, y)$  parcourt la courbe, représente l'aire entourée par cette courbe, cette aire étant affectée du signe + ou du signe — selon le sens dans lequel la courbe est parcourue. Lorsque la courbe est formée de plusieurs boucles, la question se complique; l'intégrale représente la somme des aires des diverses boucles, affectées soit du signe +, soit du signe —, selon certaines règles.

Cette proposition se généralise lorsque l'on étudie des contours tracés sur des surfaces quelconques; elle conduit à affecter de certains indices positifs, négatifs ou nuls les diverses aires que le contour découpe sur la surface; ces *indices de Gauss* jouent un rôle essentiel dans le théorème sur les polygones géodésiques qu'a démontré le grand géomètre de Göttingue.

Brunel a démontré, touchant ces indices, une importante proposition, et cela à l'occasion des recherches entreprises sur les lignes géodésiques par son collègue M. Hadamard.

Lorsque l'on se borne à étudier une portion suffisamment restreinte d'un domaine mathématique continu, on peut se contenter d'employer la géométrie cartésienne à  $n$  dimensions. Il n'en va pas de même lorsque l'on veut représenter le domaine tout entier; on doit alors tenir compte des connexions de la variété à  $n$  dimensions qui le représente, et l'*analysis situs* doit nécessairement intervenir. C'est ce que Riemann a découvert dans l'étude des fonctions non uniformes.

En abordant la théorie des équations différentielles, on a d'abord examiné ce qui se passe au voisinage d'un point; il a suffi d'introduire un nombre de coordonnées égal au nombre des variables et d'appliquer des procédés aujourd'hui classiques; mais ces procédés se sont trouvés insuffisants lorsqu'on a voulu étudier complètement

l'allure des fonctions définies par des équations différentielles; force a été de recourir aux considérations d'*analysis situs*, comme l'a reconnu le premier M. H. Poincaré.

Cet ordre de considérations joue un rôle particulièrement important dans l'étude des lignes géodésiques tracées sur des surfaces à courbures opposées.

Entre deux points donnés sur une surface, il n'y a pas, en général, une ligne géodésique unique, mais autant de lignes géodésiques distinctes qu'il y a de chemins non réductibles l'un à l'autre par déformation continue; une proposition semblable porte sur le nombre de géodésiques perpendiculaires à une géodésique donnée et issues d'un point donné; enfin, il y a autant de géodésiques fermées que l'on peut tracer sur la surface de contours fermés non réductibles les unes aux autres par déformation continue.

Pour démontrer ces beaux théorèmes, M. Hadamard devait établir ces propositions: On ne peut tracer deux géodésiques de même espèce entre deux points donnés; d'un point donné, on ne peut mener deux géodésiques de même espèce perpendiculaires à une géodésique donnée; propositions dont le caractère essentiel et premier saute aux yeux si l'on observe qu'elles sont l'extension naturelle de ces deux propositions de géométrie plane: Il existe une seule droite joignant deux points donnés; d'un point donné, on peut mener une seule perpendiculaire à une droite donnée. A ces deux propositions, devait encore être jointe celle-ci: Il n'existe pas, sur une surface, deux géodésiques fermées de même espèce.

Ces propositions pouvaient être aisément tirées du théorème de Gauss sur les polygones géodésiques, à la condition d'invoquer le lemme suivant:

Considérons, sur une surface, un contour réductible à un point, qui peut présenter des boucles, mais n'en présente aucune dont la réduction à un point soit possible; il détermine sur la surface des régions que l'on peut toutes affecter d'indices de Gauss nuls ou de même signe.

C'est de ce lemme que Brunel parvint à donner la démonstration (LXXIX).

Toutes les surfaces fermées qui peuvent se réduire à une sphère par déformation sans déchirure, soudure ni recouplement, sont des *surfaces de genre 0*. Une configuration formée de points et de lignes,

tracée sur une surface fermée de genre 0, est soumise à une relation bien remarquable, qui a été découverte par Euler; si l'on désigne par  $S$  le nombre des sommets de la configuration, par  $A$  le nombre des arêtes et par  $F$  le nombre des faces, on a, entre ces trois nombres, la relation

$$F + S = A + 2.$$

Lorsqu'on se propose de tracer sur une surface de genre 0 une configuration présentant des caractères topologiques déterminés, on doit s'assurer d'abord que cette configuration vérifie la relation d'Euler; on obtient alors, pour l'existence de cette configuration, certaines conditions de forme arithmétique, qui sont nécessaires, mais qui peuvent fort bien n'être pas suffisantes.

Proposons-nous, par exemple, de tracer sur la surface des polyèdres à sommets trilatéraux (XXXVI); nous devons alors, à la relation d'Euler, joindre l'égalité  $2A = 3S$ ; il devra donc exister un nombre entier  $n$  tel que l'on ait

$$A = 3n, \quad S = 2n, \quad F = n + 2.$$

Supposons que le polyèdre cherché doive être formé exclusivement de faces hexagonales, dont nous désignerons le nombre par  $n_6$ , et de faces pentagonales, dont nous désignerons le nombre par  $n_5$ . Nous trouvons les deux égalités

$$n_5 = 12, \quad n - n_6 = 10.$$

La première nous enseigne que le nombre des faces pentagonales est fixe et égal à 12; la seconde fera connaître le nombre des faces hexagonales lorsque  $n$  sera connu;  $n$  ne peut être inférieur à 10.

Ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes; si l'on donne à  $n$  une valeur supérieure à 10, on n'obtient pas de configuration géométrique correspondant à la solution arithmétique; la seule configuration effective correspond à  $n = 10$ ,  $n_6 = 0$ ; c'est le dodécaèdre pentagonal.

On est conduit à la même conclusion si, dans l'énoncé précédent, on remplace les hexagones par des  $r$ -gones,  $r$  étant supérieur à 6.

Sans imposer aucune restriction à la nature des sommets, proposons-nous, sur une surface fermée de genre 0, de tracer des configurations à faces exclusivement pentagonales (LXXXVIII). Si nous désignons par

$S_i$  le nombre des sommets d'où partent  $i$  arêtes, la relation d'Euler nous permettra d'écrire les égalités

$$S_3 = 20 + 2S_4 + 5S_5 + \dots + 3(k-10)S_k,$$

$$S = 20 + 3S_4 + 6S_5 + \dots + 3(k-3)S_k,$$

$$F = 12 + 2S_4 + 4S_5 + \dots + 2(k-3)S_k,$$

$$A = 30 + 5S_4 + 10S_5 + \dots + 5(k-3)S_k.$$

\* Une configuration effective de l'espèce indiquée correspond à une solution en nombres entiers de ces équations, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie ; ainsi la solution

$$S_4 = 1, \quad S_5 = S_6 = \dots = S_k = 0$$

ne correspond à aucune configuration polyédrale. En revanche, une solution arithmétique unique peut correspondre à plusieurs solutions géométriques ; la solution

$$S_4 = 5, \quad S_5 = S_6 = \dots = S_k = 0$$

correspond à 7 polyèdres essentiellement distincts.

Revenons aux configurations telles que chaque sommet donne naissance à un même nombre  $k$  d'arêtes ; si nous désignons alors par  $F_i$  le nombre des faces  $i$ -gones, c'est-à-dire des faces limitées par un nombre d'arêtes égal à  $i$  (LXXII), l'égalité d'Euler nous donne la relation suivante :

$$(1) \quad 4k = (2+k)F_4 + 4F_5 + (6-k)F_3 + (8-2k)F_4 + \dots \\ + [2p - (p-2)k]F_p.$$

Considérons, en particulier, les configurations à sommets trilatéraux :  $k = 3$  ; la relation précédente devient

$$(2) \quad 12 = 5F_4 + 4F_5 + 3F_3 + F_6 - F_7 - 2F_8 - \dots$$

Le nombre  $F_6$  des faces hexagonales n'y figure pas. Elle constitue une condition nécessaire, mais non suffisante, pour l'existence de la configuration à sommets trilatéraux.

Supposons, par exemple, que la configuration cherchée doive être formée exclusivement d'hexagones en nombre  $r$ , et de faces  $m$ -gones en nombre égal à  $n$  ; représentons une telle configuration par le symbole  $P_m(n, r)$ .

La relation (2) nous montre que les seules configurations possibles correspondent aux symboles

$$P_1(3, r), \quad P_3(4, r), \quad P_4(6, r), \quad P_5(12, r).$$

Mais ces symboles ne correspondent pas nécessairement à des configurations géométriques.

Dans le cas où  $r = 0$ , chacun des symboles correspond à une configuration géométrique effective, connue par les éléments : cette configuration est, d'ailleurs, la seule qui existe pour le symbole  $P_5(12, r)$ , comme nous l'avons vu plus haut.

Au symbole  $P_2(3, r)$  on peut faire correspondre une configuration géométrique toutes les fois que  $r$  est donné par la formule

$$r = x^2 + xy + y^2 - 1,$$

où  $x, y$  sont deux nombres entiers dont l'un au moins n'est pas nul ; deux couples  $x, y$  distincts qui correspondent à la même valeur de  $r$  fournissent des polyèdres distincts ; toute configuration ainsi obtenue peut être tracée sur une sphère de manière à présenter un axe de symétrie ternaire et trois axes de symétrie binaire.

Existe-t-il d'autres configurations  $P_2(3, r)$  à sommets trilatéraux que les polyèdres fournis par ce procédé ? Brunel regardait la négative comme probable, sans avoir pu la démontrer.

Brunel s'est encore proposé d'étudier (XCI), sur les surfaces fermées de genre 0, certaines configurations formées de la manière suivante :

A chaque sommet aboutit un même nombre  $k$  d'arêtes ; les faces sont de deux sortes : les unes sont des bi-gones ; les autres sont des  $m$ -gones ; enfin, on suppose  $k$  choisi de telle sorte que le nombre  $F_r$  des faces  $r$ -gonales disparaisse de la relation (1).

La relation (1) nous montre que trois sortes de configurations répondant à la question sont seules possibles ; ces configurations  $C_1, C_2, C_3$  sont déterminées par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} C_1 - k = 3, m = 6, F_2 = 3, F_6 = n - 1, \quad S = 2n, A = 3n; \\ C_2 - k = 4, m = 4, F_2 = 4, F_4 = n - 2, \quad S = n, A = 2n; \\ C_3 - k = 6, m = 3, F_2 = 6, F_3 = 2(n - 2), S = n, A = 3n. \end{aligned}$$

Ces configurations n'existent pas effectivement pour toute valeur

de  $n$ . Les configurations  $C_1$  peuvent être construites toutes les fois que  $n$  est donné par la formule

$$n = x^2 + xy + y^2,$$

$x, y$  étant deux nombres entiers dont l'un au moins n'est pas nul; on obtient aisément les configurations  $C_2$  toutes les fois que  $n$  est pair et les configurations  $C_3$  toutes les fois que  $n$  est au moins égal à 2.

La relation d'Euler  $F + S = A + 2$  ne s'applique pas à toutes les surfaces fermées. Si, par déformation continue, sans déchirure, soudure ni recoupement, une surface fermée est applicable non sur une sphère, mais sur un tore, toute configuration tracée sur cette surface vérifie la relation  $F + S = A$ ; elle vérifie la relation  $F + S = A - 2$ , si la surface sur laquelle elle est tracée est transformable en un tore à deux trous.

D'une manière générale, il existe des surfaces fermées telles qu'une configuration tracée sur une telle surface vérifie la relation (XXXIV)

$$(3) \quad F + S = A + 2 - 2p.$$

Ces surfaces sont dites *surfaces fermées de genre  $p$* ; le nombre  $p$ , fixe pour une surface donnée, est le *genre* de cette surface; la sphère est de genre 0, le tore de genre 1, le tore à 2 trous de genre 2; ... Le genre  $p$  n'est jamais négatif.

La configuration la plus simple que l'on puisse tracer sur une surface fermée de genre  $p$  est la configuration qui ne contient qu'un sommet et qu'une face; selon la relation d'Euler généralisée, où l'on doit faire alors  $S = 1$ , on a  $A = 2p$ . Ce résultat nous montre que, sur une surface fermée de genre  $p$ , on peut, par un point, mener  $2p$  contours fermés irréductibles l'un à l'autre; cette proposition se relie à l'étude de la représentation symbolique, donnée par M. Jordan, pour un contour fermé quelconque tracé sur la surface et, par là, à la représentation symbolique des nœuds.

On connaît l'importance, en géométrie élémentaire, du problème qui consiste à paver la sphère au moyen de polygones réguliers; ce problème s'étend aux surfaces fermées de genre quelconque et prend la forme suivante: Tracer, sur une telle surface, une configuration régulière. D'ailleurs, au sens topologique du mot, on doit entendre par configuration régulière une configuration dont toutes les faces

sont bornées par le même nombre  $m$  d'arêtes et dont les sommets servent de point de départ à un même nombre  $n$  d'arêtes. Une telle configuration vérifie non seulement la relation d'Euler généralisée (3), mais encore les relations

$$(4) \quad mF = nS = 2A.$$

Toute configuration régulière tracée sur une surface de genre  $p$  correspondra donc à une solution en nombres entiers des équations (3) et (4); en revanche, une solution arithmétique de ces équations peut ne pas correspondre à une solution géométrique (XXXI) ou bien peut correspondre à plusieurs solutions géométriques distinctes.

Laissons de côté le cas des surfaces de genre 0, qui est bien connu. Pour les surfaces de genre 1, les seules valeurs possibles de  $m$  et de  $n$  correspondent aux trois combinaisons

$$\begin{array}{cc} m = 3, & n = 6, \\ & 4, \\ & 6, \end{array} \quad \begin{array}{c} 4, \\ 3. \end{array}$$

Ce sont aussi celles qui correspondent au pavage du plan avec des polygones réguliers. Mais, dans ce cas, une circonstance particulière se présente : La relation (3) est homogène en  $F$ ,  $S$ ,  $A$ ; aussi, à chaque manière de paver le plan avec des polygones réguliers correspond une infinité de configurations régulières sur les faces de genre 1.

Lorsque  $p$  est au moins égal à 2, il ne peut exister qu'un nombre limité de configurations régulières tracées sur une surface de genre  $p$ ; pour

$$p = 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 10, \quad 11, \quad 12, \quad 13$$

le nombre des configurations régulières que les équations (3) et (4) indiquent comme possibles est

$$25, \quad 38, \quad 46, \quad 55, \quad 60, \quad 68, \quad 70, \quad 72, \quad 75, \quad 94, \quad 74, \quad 98.$$

Il resterait à voir si ces solutions arithmétiques correspondent à des solutions géométriques effectives (LXXIII).

Brunel a donné la solution complète du problème pour les surfaces de genre 2; sur une telle surface, on peut tracer des configurations régulières effectives correspondant aux 25 solutions distinctes des équations (3) et (4) (XXXI).

Parmi les configurations régulières que l'on peut tracer sur une surface, il y a lieu de considérer celles qui présentent une symétrie parfaite (XLV); de quelque sommet ou de quelque face qu'on les considère, leur aspect est le même.

Toutes les configurations régulières que l'on peut tracer sur les surfaces de genre 0 sont à symétrie parfaite; il n'en est plus de même pour les surfaces de genre 2 ou de genre plus élevé.

Par exemple, sur les surfaces de genre 2, il existe une configuration régulière pour laquelle on a

$$m = 8, \quad n = 3, \quad A = 24, \quad F = 6, \quad S = 16.$$

Cette configuration ne présente pas la symétrie parfaite.

Brunel a déterminé, parmi les 25 configurations régulières que l'on peut tracer sur une surface de genre 2, celles qui sont parfaitement symétriques; il en a tracé des dessins qui ont figuré, en 1895, à l'Exposition universelle de Bordeaux (LXV).

Il a également examiné, à ce point de vue, quelques-unes des 36 configurations régulières que l'on peut tracer sur les surfaces de genre 3 et des 46 solutions relatives aux surfaces de genre 4.

Nous allons, d'ailleurs, retrouver ces questions en étudiant les surfaces fermées quelconques.

Les surfaces fermées de genre  $p$  ne sont pas les surfaces fermées les plus générales qui se puissent concevoir; toutes ces surfaces, en effet, sont des surfaces à *deux côtés*; mais il existe des surfaces à *un seul côté* dont la bande de papier de Möbius fournit l'exemple classique (XXXIII).

Une question, il est vrai, se pose de prime abord: Une surface à un seul côté peut-elle être une surface fermée? M. H. Poincaré avait cru pouvoir démontrer le contraire; mais la proposition qu'il avait cru pouvoir établir est en contradiction avec les faits (LVIII). Möbius avait déjà étudié des polyèdres fermés à un seul côté; la surface de Steiner, une autre surface du 4<sup>e</sup> degré étudiée par M. Dyck sont des surfaces fermées à un seul côté; Brunel a montré que, dans un espace à  $n$  dimensions, on peut donner des expressions, en fonctions de  $(n - 1)$  variables, des coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , qui définissent une surface fermée telle que si l'on déplace le point  $x$  le long d'un chemin fermé tracé sur la surface, la demi-normale a changé d'orientation lorsque



le point est revenu à la position initiale. Les espaces ainsi obtenus, considérés au point de vue topologique, sont à un seul côté.

Il existe donc des surfaces fermées à un seul côté.

Pour une surface fermée quelconque, on a

$$(5) \quad F + S = A + 2 - \lambda,$$

$\lambda$  étant un nombre entier, positif ou nul. Si  $\lambda$  est pair, la surface est une surface à 2 côtés de genre  $p = \frac{\lambda}{2}$ ; si  $\lambda$  est impair, la surface est à un seul côté.

On peut, dans ce cas général, examiner une question qui a déjà été traitée pour les surfaces à deux côtés : Quelles sont les configurations qui présentent seulement un sommet et une face? Pour de telles configurations, on a  $S = 1$ ,  $F = 1$ , partant  $A = \lambda$ . Donc, par un point pris sur la surface, on peut mener  $\lambda$  contours fermés et  $\lambda$  seulement qui ne peuvent se réduire l'un à l'autre par déformation continue (LIX). Ces contours jouent un rôle capital dans la représentation symbolique d'un contour quelconque tracé sur la surface.

Le tracé des configurations régulières sur une surface fermée quelconque suppose, en premier lieu, la solution en nombres entiers des équations (4) et (5). Cette solution a été obtenue par Brunel pour les valeurs de  $\lambda$  comprises entre 3 et 26 (LXXIII); elle fournit 477 systèmes de valeurs pour  $m, n$  et indique la possibilité de 1373 configurations régulières distinctes, sans démontrer l'existence effective de ces configurations.

Pour toute valeur de  $\lambda$  au moins égale à 3, un fait remarquable se présente; les configurations régulières possibles se scindent en deux groupes : des configurations régulières *primitives* et des configurations régulières *dérivées*; ces dernières se déduisent des configurations régulières primitives relatives à des valeurs  $\lambda'$ , moindres que  $\lambda$ , et telles que  $\lambda - 2 = k(\lambda' - 2)$ . Ce fait, découvert par Brunel (LXIV), a été ensuite retrouvé par M. White<sup>(1)</sup>; Brunel a fait remarquer cette coïncidence (LXXXIII).

Lorsque le nombre des faces d'une configuration régulière est égal au nombre des sommets, on dit que la configuration est à elle-même sa *reciproque*. A chaque valeur de  $\lambda$  au moins égale à 3 correspondent

(1) WHITE, *Bulletin of the American mathematical Society*, octobre 1896.

deux sortes de configurations régulières réciproques, les unes *primitives*, les autres *dérivées*; si  $\lambda$  est pair, il n'y a qu'une seule espèce de configurations régulières réciproques primitives; il y en a deux si  $\lambda$  est impair.

En ce qui concerne les valeurs de  $\lambda$  inférieures à 3, on peut donner les résultats suivants :

Si  $\lambda = 0$ , on a forcément  $m = n = 3$ ,  $A = 6$ ,  $F = S = 4$ .

Si  $\lambda = 1$ , on a forcément  $m = n = 3$ ,  $A = 3$ ,  $F = S = 2$ .

Pour  $\lambda = 2$ , c'est-à-dire pour les surfaces de genre 1, on a  $m = n = 4$ , mais  $F, S, A$  sont quelconques; on peut paver le tore avec un nombre quelconque de quadrilatères (LXIV).

Nous avons, jusqu'ici, considéré exclusivement des surfaces fermées; la relation d'Euler peut s'étendre à une *surface ouverte* quelconque, limitée par  $\mu$  contours limites; on a alors, pour toute configuration tracée sur une semblable surface,

$$(6) \quad F + S = A + 2 - \lambda + \mu,$$

$\lambda$  étant un nombre entier, nul ou positif, qui dépend de la nature de la surface; en particulier, si  $\lambda = 0$ , la surface est réductible à une portion de plan limitée par un contour extérieur et par  $(\mu - 1)$  contours intérieurs.

Proposons-nous (LXXXV) de tracer une configuration régulière sur une telle surface. Les contours limites sont évidemment formés par un certain nombre d'arêtes, nombre que nous désignerons par  $\alpha$ , tandis que  $a$  sera le nombre des arêtes intérieures.

La possibilité de construire une configuration régulière sera subordonnée à la possibilité de satisfaire en nombres entiers aux conditions

$$F + S = A + 2 - \mu,$$

$$A = a + \alpha,$$

$$mF = 2a + \alpha,$$

$$nS = 2a + 2\alpha.$$

Si  $\mu = 2$ , la première relation devient homogène en  $F, S, A$ ; chaque système de valeurs acceptables de  $m$  et  $n$  correspond à une infinité de configurations. Les valeurs acceptables de  $m, n$  sont d'ailleurs les mêmes pour  $\mu = 1$  et pour  $\mu = 2$ . Lorsque  $\mu$  surpasse 2, un système de valeurs de  $m, n$  qui vérifie les égalités précédentes ne correspond pas nécessairement à une configuration effective et unique.

L'une des grandes difficultés des recherches d'*analysis situs* se rencontre dans le passage de cette science à la géométrie analytique; lorsqu'un être géométrique, surface ou ligne, est déterminé par des équations, il est souvent malaisé d'en déterminer les caractères topologiques; il n'est pas moins difficile de construire des équations capables de représenter un être géométrique dont les caractères topologiques sont donnés d'avance; ce dernier problème est demeuré, jusqu'ici, presque inexploré.

Brunel avait imaginé des méthodes générales propres à l'aborder dans des cas étendus; les *Procès-verbaux* des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux contiennent de fréquentes allusions à ces méthodes; nous y voyons (VI), notamment, qu'elles avaient permis de former des équations représentant tous les types de courbes que l'on peut tracer sur le tore, de déterminer l'équation générale des *propulseurs*, d'en déduire une infinité de propulseurs à ailes helicoïdes, cycloïdes ou autres; mais il ne nous reste aucune indication précise qui nous permette de reconstituer ces méthodes. Une seule communication, rédigée avec quelque détail, a trait à cet ordre de recherches; elle a pour objet de former l'équation d'une surface à courbures partout opposées et à quatre nappes infinies (LXXVII); nous en avons dit quelques mots dans la section consacrée aux recherches de géométrie analytique.

## SECTION 9. — *Analysis situs* — Théorie des Nœuds.

Les regrets que nous formulons à la fin de la section précédente trouvent de nouveau occasion de se manifester touchant les recherches que Brunel avait consacrées aux *enlacements de courbes fermées* ou *nœuds*; nous savons qu'il possédait un procédé propre à représenter symboliquement ces enlacements et à en étudier les propriétés, mais la nature de ce procédé est, pour nous, l'objet de conjectures qu'il est malaisé de transformer en certitudes. Nous connaissons seulement l'énoncé de quelques résultats remarquables qu'il en avait tirés.

En 1876, P. G. Tait, dans un important travail inséré aux *Transactions philosophiques d'Edimbourg*, avait signalé un fait curieux: On peut décrire trois courbes fermées enlacées entre elles de telle sorte

qu'il soit impossible de les séparer l'une de l'autre, mais que, d'autre part, la rupture de l'une quelconque d'entre elles rende libres les trois courbes.

M. Hermann Brunn, dans une communication insérée en 1892 aux comptes rendus de l'Académie de Munich, avait étendu de diverses manières la remarque de Tait; il avait obtenu  $n$  courbes fermées enlacées de telle sorte que la rupture de l'une quelconque d'entre elles rendait libres toutes les autres; deux procédés bien distincts lui avaient permis d'obtenir de tels assemblages.

Brunel s'est occupé, à son tour, d'étendre les résultats obtenus par Tait et par M. Hermann Brunn (XLIX).

Si l'on considère une tresse à trois brins, numérotés 1, 2, 3, si on l'arrête aussitôt que les trois brins reviennent à leur position initiale, et si l'on réunit alors les extrémités de chaque brin, on obtient les trois courbes de Tait. Les deux généralisations de M. Brunn peuvent s'obtenir par des déformations convenables de cet ensemble.

Au lieu d'arrêter la tresse et d'en fermer les brins au moment où ils reviennent pour la première fois à leur position relative initiale, on peut attendre qu'ils y reviennent pour la  $q^{\text{e}}$  fois; pour chaque valeur de  $q$ , on obtient trois courbes formées qui jouissent de la même propriété que les courbes étudiées par Tait et qui se prêtent encore aux généralisations imaginées par M. Brunn.

La tresse à  $(2p + 1)$  brins, traitée de la même manière, fournit des ensembles de  $(2p + 1)$  courbes fermées enlacées de telle sorte que la rupture de  $(2p - 1)$  quelconques d'entre elles laisse libre les deux dernières.

Par une représentation symbolique convenable, l'étude de ces enlacements se ramène à la théorie générale des opérations (LXXVIII) et, en particulier, à ce problème dont nous avons dit quelques mots à la fin de la 5<sup>e</sup> section : Constituer une telle suite d'opérations que si l'une quelconque de ces opérations se réduit à l'opération identique, l'ensemble se réduit aussi à l'opération identique.

SECTION 10. — **Recherches historiques et bibliographiques.**

Brunel possédait, sur les diverses branches des mathématiques, une très grande érudition. Cette érudition se marque particulièrement dans les publications qu'il a consacrées à des questions historiques et bibliographiques. Mentionnons son importante *Monographie de la Fonction Gamma* (VII), publiée en 1887 dans les *Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux*, et le fascicule sur les *Intégrales définies* (LXXXI) qu'il a inséré dans l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*. Sa connaissance approfondie de toutes les recherches topologiques lui eût rendu aisée la rédaction du fascicule sur l'*Analysis situs* qu'il devait donner à la même collection. Indiquons également l'existence d'un fascicule autographié, contenant une bibliographie très étendue des recherches relatives à l'algèbre universelle; ce fascicule est conservé à la Bibliothèque universitaire de Bordeaux (XXVI).

Une place de choix doit être ici réservée à la belle *Notice sur l'influence scientifique de Guillaume-Jules Hoüel*; Brunel y apprécie avec la plus grande sagacité l'influence exercée par son illustre prédécesseur sur l'enseignement des diverses branches des mathématiques et, particulièrement, de la géométrie.

Ce remarquable écrit est le modèle auquel nous avons sans cesse songé en écrivant la présente notice; nous souhaitons que l'imitation ne paraisse pas trop indigne de l'exemple; pour parler des travaux de Hoüel, Brunel avait une compétence qui nous manquait, à nous, pour analyser les recherches de Brunel; puisse l'affection avoir comblé quelque peu les lacunes que nos connaissances laissaient béantes!

Bordeaux, le 23 avril 1902.

P. DUHEM.

# TRAVAUX SCIENTIFIQUES

## DE

### GEORGES BRUNEL

I. — Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à  $n$  dimensions (*Mathematische Annalen*, Bd. XIX, p. 37; 1882).

II. — Étude sur les relations algébriques entre les fonctions hyper-elliptiques de genre 3. *Thèse* soutenue à la Faculté des Sciences de Paris le 4 juillet 1883 (*Annales de l'École normale supérieure*, 2<sup>e</sup> série, t. XII, p. 199; 1883).

III. — Note sur l'analyse indéterminée et la géométrie à  $n$  dimensions, présentée à la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux dans sa séance du 18 décembre 1884 (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3<sup>e</sup> série, t. II; Procès-verbaux, p. vii, et Mémoires, p. 129; 1886).

IV. — Sur quelques points d'ANALYSIS SITUS (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3<sup>e</sup> série, t. II; Procès-verbaux, p. xi, séance du 5 mars 1885).

V. — Sur les systèmes articulés (*Ibid.*, p. xv, séance du 18 juin 1885).

VI. — Sur la détermination analytique des courbes et des surfaces données par des conditions topologiques (*Ibid.*, p. xxxix, séance du 28 janvier 1886).

VII. — Monographie de la fonction Gamma (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3<sup>e</sup> série, t. III; Mémoires, p. 1; 1887).

VIII. — Note sur le calcul fonctionnel (*Ibid.*, p. 181; 1887).

IX. — Notice sur l'influence scientifique de Guillaume-Jules Houël, professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Bordeaux, lue à la

Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux le 23 juin 1887 (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3<sup>e</sup> série, t. III; Procès-verbaux, p. xix; 1887 et 3<sup>e</sup> série, t. IV, Mémoires, p. 1; 1888).

X. — Sur les racines des matrices zéroïdales (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3<sup>e</sup> série, t. IV; Procès-verbaux, p. viii, séance du 19 janvier 1888. — *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CVI, p. 467; 1888).

XI. — Sur la théorie des développantes (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3<sup>e</sup> série, t. IV; Procès-verbaux, p. xi, séance du 16 février 1888).

XII. — Nouvelles propositions sur la théorie des matrices (*Ibid.*, p. xxii, séance du 26 avril 1888).

XIII. — Sur la généralisation de la notion de périodicité (*Ibid.*, p. xxvi, séance du 21 juin 1888).

XIV. — Sur l'existence des cycles astronomiques et la théorie des fractions continues (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3<sup>e</sup> série, t. V; Procès-verbaux, p. xxv, séance du 2 mai 1889).

Dans la séance du 16 mai 1889, M. P. Tannery présente quelques remarques au sujet de cette communication.

XV. — Sur les problèmes de fermeture (*Ibid.*, p. x, séance du 24 janvier 1889).

XVI. — Sur les courbes autopolaires (*Ibid.*, p. xiii, séance du 21 février 1889).

XVII. — Sur une application du calcul symbolique (*Ibid.*, p. xliiv, séance du 4 juillet 1889).

XVIII. — Sur les trajectoires réciproques (*Ibid.*, p. lxxviii, séance du 23 janvier 1890).

XIX. — Sur l'algèbre universelle (*Ibid.*, p. lxxvi, séance du 20 février 1890).

XX. — Sur le calcul fonctionnel (*Ibid.*, p. lxxxii, séance du 20 mars 1890).

XXI. — Sur l'histoire des machines à calcul de Babbage (*Ibid.*, p. lxxxiii, séance du 1<sup>er</sup> mai 1890).

XXII. — Sur le minimum du nombre des couleurs à employer pour la coloration d'une carte géographique (*Ibid.*, p. lxxxix, séance du 19 juin 1890).

XXIII. — Sur le problème des alignements (*Ibid.*, p. xciii, séance du 24 juillet 1890).

XXIV. — Sur le théorème fondamental de l'algèbre (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles*, 4<sup>e</sup> série, t. II; Procès-verbaux, p. 1, séance du 20 novembre 1890).

XXV. — Sur les coordonnées de l'hyperboloïde (*Ibid.*, p. viii, séance du 4 décembre 1890).

XXVI. — Sur l'algèbre universelle (*Ibid.*, p. ix, séance du 18 décembre 1890).

Une notice manuscrite, renfermant une bibliographie très complète de l'Algèbre universelle, et ayant servi à cette communication, est déposée à la Bibliothèque universitaire de Bordeaux (Section des Sciences et des Lettres), sous le n<sup>o</sup> 7114.

XXVII. — Sur le nombre  $\pi$  (*Ibid.*, p. xi, séance du 8 janvier 1891).

XXVIII. — Lettres de Hamilton, relatives aux thèses de Houël (*Ibid.*, p. xv, séance du 22 janvier 1891).

XXIX. — Généralisation du théorème de Meusnier (*Ibid.*, p. xv, séance du 22 janvier 1891).

XXX. — Sur les algèbres linéaires non associatives (*Ibid.* p. xx, séance du 19 février 1891).

XXXI. — Sur les configurations régulières tracées sur une surface quelconque (*Ibid.*, p. xxii, séance du 9 avril 1891).

XXXII. — Sur la distribution des courants dans un système de conducteurs linéaires et le problème du saut du cavalier sur l'échiquier (*Ibid.*, p. xxxiv, séance du 11 juin 1891).

XXXIII. — Sur les surfaces à un seul côté (*Ibid.*, p. xxxvii, séance du 25 juin 1891).

XXXIV. — Sur les contours tracés sur les surfaces (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 4<sup>e</sup> série, t. III; Procès-verbaux, p. iv, séance du 19 novembre 1891).

XXXV. — Sur la définition de la ligne droite en topologie (*Ibid.*, p. xxx, séance du 4 février 1892).

XXXVI. — Sur quelques polyèdres eulériens (*Ibid.*, p. xxxvi, séance du 17 mars 1892).

XXXVII. — Sur les surfaces capillaires (*Ibid.*, p. xlii, séance du 28 avril 1892).

XXXVIII. — Sur les fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et natu-*



relles de Bordeaux, 4<sup>e</sup> série, t. IV; Procès-verbaux, p. vi, séance du 22 décembre 1892).

XXXIX. — Sur quelques problèmes d'ANALYSIS SITUS (*Ibid.*, p. ix, séance du 12 janvier 1893).

Résumé du Mémoire inscrit ci-dessous sous le n° LV.

XL. — Sur les divers modes de représentation graphique de la benzine (*Ibid.*, p. xviii, séance du 9 février 1893).

XLI. — Remarques relatives à la représentation symbolique et à la représentation graphique des relations de parenté (*Ibid.*, p. xxv, séance du 9 mars 1893).

XLII. — Sur la démonstration par l'absurde (*Ibid.*, p. xxxii, séance du 23 mars 1893).

XLIII. — Sur un théorème de Mairan (*Ibid.*, p. xlv, séance du 17 mai 1893).

XLIV. — Trajets symétriques du cavalier sur l'échiquier (*Ibid.*, p. liii, séance du 15 juin 1893).

XLV. — Configurations régulières à symétrie parfaite sur les surfaces de genre  $p$  (*Ibid.*, p. lvii, séance du 13 juillet 1893).

XLVI. — Note sur le nombre des sommets des courbes planes rationnelles d'ordre  $n$  (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 4<sup>e</sup> série, t. III, p. 167; 1893).

XLVII. — Sur un problème de combinaison (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 4<sup>e</sup> série, t. V; Procès-verbaux, p. xiv, séance du 28 décembre 1893).

XLVIII. — Sur un polyèdre de Kirkman (*Ibid.*, p. xxix, séance du 8 mars 1894).

XLIX. — Sur l'enlacement des courbes (*Ibid.*, p. xxxi, séance du 5 avril 1894).

L. — Reconstitution d'un saut du cavalier dont une partie a été détruite (*Ibid.*, p. xxxiv, séance du 10 mai 1894).

LI. — Représentation graphique des carbures saturés (*Ibid.*, p. xxxix, séance du 24 mai 1894).

LII. — Construction et énumération des  $n$ -èdres, à base  $(n - 1)$  gonale et à sommets trilatéraux (*Ibid.*, p. xlii, séance du 21 juin 1894).

LIII. — Remarques sur les systèmes de triades (*Ibid.*, p. xlvii, séance du 19 juillet 1894).

LIV. — Note sur le nombre de points doubles que peut présenter

le périmètre d'un polygone (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 4<sup>e</sup> série, t. IV, p. 273; 1894).

LV. — ANALYSIS SITUS. Recherches sur les réseaux (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 4<sup>e</sup> série, t. V, p. 165; 1895).

LVI. — Réseaux réguliers (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, année 1894-1895, p. 3, séance du 13 décembre 1894).

LVII. — Polymérisation du carbone (*Ibid.*, p. 8, séance du 27 décembre 1894).

LVIII. — Sur un problème de stéréotomie (*Ibid.*, p. 9, séance du 10 janvier 1895).

LIX. — Configurations tracées sur une surface fermée quelconque et ne possédant qu'un sommet et qu'une face (*Ibid.*, p. 13, séance du 24 janvier 1895).

LX. — Sur un problème de partitions (*Ibid.*, p. 24, séance du 14 février 1895).

LXI. — Sur le problème des alignements (*Ibid.*, p. 28, séance du 21 février 1895).

LXII. — Sur les duades formées avec un nombre pair d'éléments (*Ibid.*, p. 32, séance du 7 mars 1895).

LXIII. — Système de  $n$ -ades formé avec  $n^2$  éléments (*Ibid.*, p. 56, séance du 9 mai 1895).

LXIV. — Sur les configurations régulières réciproques tracées sur une surface fermée quelconque (*Ibid.*, p. 63, séance du 13 juin 1895).

LXV. — ANALYSIS SITUS. Études sur les réseaux : 1<sup>o</sup> Représentation graphique des corps de la formule  $C^6H^6$ ; 2<sup>o</sup> Trajets à symétrie parfaite sur l'échiquier; 3<sup>o</sup> Construction de grecques; 4<sup>o</sup> Configurations régulières sur les surfaces de genre 2 (*Travaux présentés à l'Exposition universelle de Bordeaux en 1895*).

LXVI. — Sur les systèmes de triades formés avec  $(6n + 1)$  éléments. Communication faite le 6 août 1895 au Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences, tenu à Bordeaux en 1895 (*Comptes rendus du Congrès*, 1<sup>re</sup> partie, p. 180; 2<sup>e</sup> partie, p. 145).

LXVII. — Remarques sur l'ensemble des duades qu'on peut fermer avec  $n$  éléments (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, année 1895-1896, p. 6, séance du 5 décembre 1895).

LXVIII. — Sur les surfaces et les espaces à un seul côté (*Ibid.*, p. 26, séance du 23 janvier 1896).

LXIX. — Polygones auto-inscrits (*Ibid.*, p. 35, séance du 19 mars 1896).

LXX. — Sur les triades formées avec  $(6n - 1)$  et  $(6n - 2)$  éléments (*Ibid.*, p. 40, séance du 16 avril 1896).

LXXI. — Sur la construction des systèmes de quadricycles de  $(8n + 1)$  éléments (*Ibid.*, p. 58, séance du 18 juin 1896).

LXXII. — Construction d'un réseau donné à l'aide d'un nombre déterminé de traits (*Ibid.*, p. 62, séance du 2 juillet 1896).

LXXIII. — Sur les configurations régulières tracées sur des surfaces fermées quelconques (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, année 1896-1897, p. 4, séance du 26 novembre 1896).

LXXIV. — Sur la décomposition de deux figures géométriques équivalentes en un nombre fini d'éléments superposables chacun à chacun (*Ibid.*, p. 18, séance du 24 décembre 1896).

LXXV. — Sur un groupe d'opérations (*Ibid.*, p. 30, séance du 4 février 1897).

LXXVI. — Sur un problème combinatoire de Steiner (*Ibid.*, p. 37, séance du 18 février 1897).

LXXVII. — Sur une surface à courbures opposées (*Ibid.*, p. 62, séance du 4 mars 1897).

LXXVIII. — Sur une suite remarquable d'opérations (*Ibid.*, p. 86, séance du 29 avril 1897).

LXXIX. — Des contours tracés sur les surfaces (*Ibid.*, p. 128, séance du 1<sup>er</sup> juillet 1897).

LXXX. — Décomposition d'un carré en quatre parties superposables (*Ibid.*, p. 161, séance du 22 juillet 1897).

LXXXI. — Bestimmte Integrale (*Encyclopädie des mathematischen Wissenschaften*, von H. Burkhardt und F. Meyer, Bd. II, Leipzig, 1899).

LXXXII. — Sur quelques configurations polyédrales (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, année 1897-1898, p. 20, séance du 9 décembre 1897).

LXXXIII. — Polygones à auto-inscription multiple (*Ibid.*, p. 43, séance du 6 janvier 1898).

LXXXIV. — Sur les duades formées avec  $2p$  éléments (*Ibid.*, p. 184, séance du 3 mars 1898).

LXXXV. — Configurations régulières sur des surfaces quelconques (*Ibid.*, p. 224, séance du 23 juin 1898).

LXXXVI. — Systèmes de quadricycles de  $n$  éléments (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, année 1898-1899, p. 59, séance du 2 mars 1899).

LXXXVII. — Sur les  $v$ -cycles de  $(2v + 1)$  éléments (*Ibid.*, p. 71, séance du 23 mars 1899).

LXXXVIII. — Polyèdres eulériens à faces pentagonales (*Ibid.*, p. 103, séance du 18 mai 1899).

LXXXIX. — Sur la représentation graphique des isomères (*Ibid.*, p. 108, séance du 1<sup>er</sup> juin 1899).

XC. — Problème des communications; question de combinaison (*Intermédiaire des mathématiciens*, t. VI, 209; 1899).

XCI. — Configurations spéciales tracées sur les surfaces de genre 0 (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, année 1899-1900, p. 2, séance du 21 décembre 1899).

XCII. — Sur un problème de Clausen (communication verbale) (*Ibid.*, p. 48, séance du 8 mars 1900).

XCIII. — Sur quelques déterminants (communication verbale) (*Ibid.*, p. 51, séance du 22 mars 1900).

XCIV. — Dissection géométrique (communication verbale) (*Ibid.*, p. 53, séance du 5 avril 1900).

XCV. — Construction cyclique des systèmes de triades (communication verbale) (*Ibid.*, p. 54, séance du 26 avril 1900).

XCVI. — Sur un problème de logique (communication verbale) (*Ibid.*, p. 66, séance du 21 juin 1900).

XCVII. — Sur les deux systèmes de triades de 13 éléments (mémoire posthume) (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 5<sup>e</sup> série, t. VII, p. 305, 1901. *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 6<sup>e</sup> série, t. II, p. 1; 1901).



# TABLE DES MATIÈRES

## PREMIÈRE PARTIE

LA VIE. . . . .	I
-----------------	---

## SECONDE PARTIE

LES TRAVAUX. . . . .	XXXI
Section 1. — Géométrie pure . . . . .	XXXI
— 2. — Géométrie à 2, 3 et $n$ dimensions . . . . .	XXXIII
— 3. — Théorie des nombres. . . . .	XXXVIII
— 4. — Algèbre. . . . .	XLI
— 5. — Extensions diverses de l'algèbre . . . . .	XLIII
— 6. — <i>Analysis situs</i> . Recherches sur les réseaux. . . . .	XLVI
— 7. — <i>Analysis situs</i> et analyse combinatoire . . . . .	LIX
— 8. — <i>Analysis situs</i> . Configurations tracées sur les surfaces . . . . .	LXIX
— 9. — <i>Analysis situs</i> . Théorie des nœuds . . . . .	LXXX
— 10. — Recherches historiques et bibliographiques . . . . .	LXXXII
TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE GEORGES BRUNEL. . . . .	LXXXIII



# SUR LES DEUX SYSTÈMES DE TRIADES DE TREIZE ÉLÉMENTS

Par G. BRUNEL

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

On appelle *système de triades* de  $6n + 1$  ou de  $6n + 3$  éléments un ensemble de triades tel que chacune des duades que l'on peut former avec les éléments considérés apparaisse dans l'ensemble une fois et une fois seulement.

De tels systèmes existent pour toute valeur de  $n$ . Cette proposition a été établie par Kirkman<sup>(1)</sup>, puis sous une forme identique au fond, mais plus explicite, par Reiss<sup>(2)</sup>.

Les résultats obtenus par M. Netto dans les *Mathematische Annalen* (3) ne sont pas d'un caractère aussi général, mais fournissent dans certains cas des systèmes distincts de ceux que l'on obtient par l'emploi du procédé de Kirkman-Reiss. M. H. Moore a établi ensuite<sup>(4)</sup> l'existence des systèmes de triades pour toute valeur de  $n$  et a montré en particulier que lorsque le nombre des éléments est supérieur à 13 il y a au moins deux systèmes de triades essentiellement distincts.

Dans le cas de 13 éléments, MM. Netto et H. Moore étaient portés à croire qu'il n'existait effectivement qu'un seul système de triades.

M. Jan de Vries<sup>(5)</sup> a signalé l'existence d'un système de triades de 13 éléments, distinct de celui que M. Netto avait construit. Il ajoute qu'il n'est pas en état de prouver que les deux systèmes ainsi obtenus sont les seuls possibles.

Nous nous proposons d'établir ici que le système donné par M. Jan de Vries est identique au fond au système fourni par la construction de Kirkman-Reiss.

(1) *Camb. and Dubl. M. J.*, t. II; 1847.

(2) *J. de Crelle*, t. 56; 1859.

(3) *T.* XLII; 1893.

(4) *Math. Ann.*, t. XLIII; 1893.

(5) *Circ. Mat. di Palermo*, et *Verslagen Zitt. K. Ak. Wetens.*, t. III, p. 64-67; 1894.



Nous montrerons aussi qu'il n'y a en réalité pour 13 éléments que deux systèmes distincts.

Représentons par  $S_1$  le système de triades contenu dans le Tableau

$$S_1 \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 8 & 10 & 12 \\ \hline 9 & 11 & 7 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ \hline 6 & 6 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ \hline 9 & 8 & 11 & 10 & 7 & 12 \\ \hline \end{array} \right.$$
  

$$\left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 9 & 11 \\ \hline 8 & 10 & 12 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 9 & 8 & 7 \\ \hline 12 & 11 & 10 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 11 & 10 & 7 & 12 & 9 & 8 \\ \hline \end{array} \right. ;$$

les triades qui figurent dans un des rectangles du Tableau s'échangent entre elles par les substitutions suivantes :

$$(0) (1, 2, 3) (4, 5, 6) (7, 9, 11) (8, 10, 12)$$

et

$$(0) (1) (2, 3) (4) (5, 6) (7, 8) (9, 10) (11, 12).$$

Il n'y a donc en réalité que huit types distincts de triades dans le Tableau  $S_1$ , par exemple les triades

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 6 & 7 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 9 & 9 & 8 & 12 & 11. \end{array}$$

Si l'on considère dans le Tableau  $S_1$  les quatre triades

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 9 & 9 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 11 & 7 & 11, \end{array}$$

on reconnaît immédiatement que l'on peut écrire quatre triades différentes des précédentes et présentant les mêmes duades en substituant aux quatre triades les suivantes :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 7 & 11 & 3 & 11. \end{array}$$

Par un tel échange le Tableau  $S_1$  se trouve modifié et nous déduisons de la sorte du premier Tableau  $S_1$  un nouveau Tableau  $S_2$ , que l'on peut disposer comme il suit :

6	4	9	8	5	12	0	11	1	7	10	3	2
4	9	8	5	12	0	11	1	7	10	3	2	6
5	12	0	11	1	7	10	3	2	6	4	9	8

6	4	9	8	5	12	0	11	1	7	10	3	2
9	8	5	12	0	11	1	7	10	3	2	6	4
1	7	10	3	2	6	4	9	8	5	12	0	11

Les triades qui figurent dans un des deux rectangles du Tableau s'échangent entre elles par la substitution cyclique

$$(6, 4, 9, 8, 5, 12, 0, 11, 1, 7, 10, 3, 2).$$

Il n'y a donc en réalité ici que deux types distincts de triades, par exemple les triades

$$\begin{array}{cc} 6 & 6 \\ 4 & 9 \\ 5 & 1. \end{array}$$

Les différents systèmes de triades de 13 éléments qui ont été donnés jusqu'ici peuvent être ramenés, par une substitution convenable effectuée sur les éléments, à coïncider avec le Tableau  $S_1$  ou avec le Tableau  $S_2$ .

Prenons le système de Kirkman<sup>(1)</sup> mis sous la forme

$$K \left( \begin{array}{cccccccccccccc} A & A & A & A & A & A & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_3 & a_3 & a_4 & a_4 \\ a_1 & a_3 & b_1 & b_3 & c_1 & c_3 & b_1 & b_3 & b_2 & b_4 & b_4 & b_4 & b_2 & b_3 \\ a_2 & a_4 & b_2 & b_4 & c_2 & c_4 & c_1 & c_4 & c_3 & c_1 & c_3 & c_2 & c_4 & c_2 \\ & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & b_1 & b_2 & b_1 & b_2 & c_1 & c_2 & c_1 & c_2 & \\ & a_3 & a_4 & a_4 & a_3 & b_3 & b_4 & b_4 & b_3 & c_4 & c_3 & c_3 & c_4 & \\ & b_2 & b_1 & b_4 & b_3 & c_3 & c_2 & c_4 & c_1 & a_3 & a_1 & a_4 & a_2. \end{array} \right.$$

Si l'on remplace respectivement les symboles

$$A \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4$$

<sup>(1)</sup> *Camb. and Dubl. M. J.*, t. VIII, p. 38-45; 1853.

par les chiffres

6 9 1 8 2 3 0 10 7 11 12 4 5,

ont retrouve précisément le Tableau  $S_1$ . Nous pouvons exprimer ce fait par la relation suivante :

$$\left( \begin{array}{cccccccccccc} A & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 6 & 9 & 1 & 8 & 2 & 3 & 0 & 10 & 7 & 11 & 12 & 4 & 5 \end{array} \right) K \equiv S_1.$$

Il n'est pas utile d'insister et d'indiquer les transformations qui permettent de passer, des deux autres systèmes de triades que Kirkman a donnés dans le même Mémoire ou bien de celui que Reiss a construit<sup>(1)</sup>, au seul système  $S_1$ .

Nous nous contenterons de donner les transformations relatives au système de Jan de Vries<sup>(2)</sup>. Le système est le suivant :

(V)

1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
2	4	6	8	9	10	4	5	7	8	10	4	5
3	5	7	11	12	13	6	11	13	9	12	8	12
3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	7	11
6	7	9	7	9	10	6	7	8	8	9	8	12
13	11	10	12	13	11	10	9	13	12	11	10	13

et si l'on y permute

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

en

4 9 12 10 2 5 6 8 0 11 1,

on retrouve encore le Tableau  $S_1$ . Nous pouvons donc écrire la relation

$$\left( \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 9 & 12 & 10 & 2 & 5 & 6 & 3 & 8 & 0 & 11 & 7 & 1 \end{array} \right) V \equiv S_1.$$

Le système de M. Jan de Vries n'est donc pas distinct de celui de Kirkman et rien n'est plus facile, avec ce qui précède, que de donner la substitution qui transforme l'une des formes dans l'autre. Il suffit de

<sup>(1)</sup> *J. de Crelle*, t. 56; 1859.

<sup>(2)</sup> *Zitt. Ak. Wetens.*, t. III; 1894.

faire le produit de la substitution qui conduit de  $V$  à  $S_1$  par l'inverse de la substitution qui conduit de  $K$  à  $S_1$ . On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ c_3 & a_1 & c_2 & b_3 & a_4 & c_4 & A & b_1 & a_3 & b_2 & c_1 & b_4 & a_2 \end{pmatrix} V \equiv K.$$

En ce qui concerne le système de Netto <sup>(1)</sup>

$$(N) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 & 1 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

il ne diffère évidemment que par la forme du système  $S_2$ , et l'on a, entre ces deux systèmes, la relation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 4 & 9 & 8 & 5 & 12 & 0 & 11 & 1 & 7 & 10 & 3 & 2 \end{pmatrix} N \equiv S_2.$$

Nous nous proposons maintenant de montrer que  $S_1$  et  $S_2$  sont deux systèmes essentiellement distincts et que les autres systèmes que l'on peut construire se réduisent nécessairement à l'une de ces deux formes par une substitution convenablement choisie.

Considérons un système quelconque des triades des 13 éléments 0, 1, 2, ..., 12. Les triades sont au nombre de 26. Prenons l'une quelconque d'entre elles  $a, b, c$  et supprimons dans le Tableau cette triade et toutes celles qui contiennent un de ses éléments,  $a$  ou  $b$  ou  $c$ . Comme  $a$  figurait dans le système accouplé à tous les autres éléments, il existe, en dehors de la triade  $a, b, c$ , cinq autres triades contenant  $a$ . Il en est de même pour  $b$  et  $c$ . Le nombre total des triades supprimées est égal à  $1 + 3 \times 5 = 16$ . Les triades qui restent sont en nombre égal à 10 et contiennent les éléments autres que  $a, b, c$ , c'est-à-dire un nombre d'éléments aussi égal à 10; enfin, un quelconque des éléments qui subsistent apparaît dans trois triades, puisque, dans le système initial, cet élément figurait dans six triades et que l'on a supprimé les trois triades distinctes où cet élément s'accouplait à  $a$ , à  $b$  et à  $c$ .

(<sup>1</sup>) *Math. Ann.*, t. XLII: 1873.

Les triades qui subsistent, relativement à la triade quelconque  $a, b, c$  du système, correspondent donc à une configuration  $(3, 3)_{10}$  de Kantor.

D'autre part, les duades que l'on peut former avec 10 éléments sont en nombre égal à  $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ . Sur ces 45 duades, il y en a 30 qui sont employées dans les dix triades qui subsistent ou, en d'autres termes, dans la configuration  $(33)_{10}$  dont nous connaissons maintenant l'existence. Les quinze autres se divisent par groupes de cinq; il y a un groupe de cinq duades contenant les dix éléments, et chacun d'eux une seule fois, formé par les duades qui figurent avec  $a$  dans les triades supprimées; de même, il y a un groupe de cinq duades correspondant à  $b$  et un groupe de cinq correspondant à  $c$ .

Si l'on représente les dix éléments par dix points dans l'espace et une duade de deux éléments par une ligne qui relie les deux sommets correspondants, les quinze duades dont il s'est agi en dernier lieu correspondent à un réseau à dix sommets, chacun des sommets étant le point de départ de trois lignes ou arêtes. Cinq des arêtes sont relatives à un élément extérieur  $a$  et constituent ce que nous avons appelé ailleurs<sup>(1)</sup> un *demi-trajet*. Un autre demi-trajet correspond à  $b$ ; un troisième demi-trajet est relatif à  $c$ .

De ce qui précède il résulte que, pour construire un système de triades de 13 éléments, il suffit : 1° de construire un ensemble de dix triades pour dix éléments dans lequel chaque élément apparaît trois fois, et trois fois seulement; 2° de former le réseau des duades non employées dans les dix triades précédentes et de le décomposer en demi-trajets; 3° d'écrire un Tableau contenant les dix triades fournies par la première construction, une triade formée avec trois éléments distincts de ceux déjà employés et quinze triades obtenues en mettant devant chacune des duades qui entrent dans un demi-trajet un de ces trois nouveaux éléments.

La solution de la première partie de la question est connue. Kantor, Martinetti ont montré qu'il n'existait que dix configurations  $(3, 3)_{10}$  distinctes auxquelles on est convenu d'attribuer respectivement les symboles suivants :

A B C D E F G H J K

<sup>(1)</sup> G. BRUNEL, *Analysis Situs : Recherches sur les réseaux* (Mém. Soc. Ph. Nat. Bord., V<sub>4</sub>, p. 165; 1895).

Nous aurons donc à examiner successivement ce qui arrive lorsque l'on prend, comme point de départ de la construction d'un système de triades, ces différentes configurations. Relativement aux Tableaux  $S_1$  et  $S_2$ , les configurations  $(33)_{10}$  qui se présentent comme correspondant aux différentes triades qui constituent chacun des Tableaux offrent les caractères suivants :

			<i>Système <math>S_1</math>.</i>	
La triade	1,	2, 3	et, par suite, aussi les triades qui, dans le Tableau $S_1$ , sont dans le même rectangle, fournissent des configurations de symboles respectifs.	G
	4,	5, 6		F
	0,	1, 4		A
	0,	8, 9		D
	1,	6, 9		J
	4,	7, 8		H
	4,	9, 12		K
	1,	7, 11		H.

Il y a donc, pour le système  $S_1$ , des triades qui correspondent à des configurations  $(33)_{10}$  de symboles

G F A D J H K

en nombres respectivement égaux à

1 1 3 3 6 9 3

			<i>Système <math>S_2</math>.</i>	
La triade	4,	5, 6	et, par suite, aussi les triades qui, dans le Tableau $S_2$ , sont dans le même rectangle, fournissent des configurations de symboles respectifs.	J
	1,	6, 9		E.

Il y a donc, pour le système  $S_2$ , des triades qui correspondent à des configurations  $(3, 3)_{10}$  de symboles

J E

en nombres respectivement égaux à

13 13

Ceci nous montre une différence essentielle dans la constitution des systèmes  $S_1$  et  $S_2$  qui sont ainsi complètement distincts.

Les configurations de symbole B et C n'apparaissent pas dans la constitution des systèmes  $S_1$  et  $S_2$ ; on serait porté à croire que ces deux configurations fournissent alors des systèmes nouveaux de triades. Nous verrons qu'il n'en est rien et que la seconde partie de la question n'admet pas alors de solution.

Cette seconde partie de la question consiste à former, pour un réseau déterminé, les demi-trajets. Les réseaux que l'on a à considérer ici se présentent avec un caractère des plus simples, mais nous savons, d'une manière générale, former d'une façon systématique les demi-trajets relatifs à un réseau quelconque donné (1).

Soient  $i, k$  deux sommets quelconques du réseau; considérons un carré à  $n$  lignes et à  $n$  colonnes et faisons correspondre la  $p^{\text{ième}}$  ligne et la  $p^{\text{icème}}$  colonne du carré au sommet  $p$ . Dans la  $i^{\text{ième}}$  colonne et dans la  $k^{\text{ième}}$  ligne, nous conviendrons de mettre 0 lorsque les deux sommets du réseau  $i$  et  $k$  ne sont pas reliés par une arête, et de mettre un symbole  $\overset{i}{k}$  indiquant la présence de l'arête qui relie  $i$  à  $k$  lorsque cette arête existe.

Le symbole  $\overset{k}{i}$  sera considéré comme identique au symbole  $\overset{i}{k}$ , mais de signe contraire; cela revient à supposer que, sur chacune des arêtes du réseau, on choisit un sens déterminé.

Nous ne considérons pas les arêtes du réseau qui partent d'un sommet pour aboutir à ce même sommet. Nous n'avons pas non plus à supposer ici l'existence de plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets.

Dans ces conditions, à un réseau donné correspond un tableau carré parfaitement défini que l'on peut considérer comme un déterminant symétrique gauche.

Inversement, un déterminant symétrique gauche étant donné, il lui correspond un réseau parfaitement défini.

Les réseaux qui nous occupent contiennent un nombre pair de sommets. Or, on sait qu'un déterminant symétrique gauche d'ordre pair est le carré d'une expression qu'il est facile de former. Chacun des termes qui figurent dans cette expression correspond à un demi-trajet.

(1) *Mém. Soc. Ph. Nat. Bord.*, V, p. 176; 1895.

Le développement de cette expression se simplifie considérablement dans un cas tel que celui que nous rencontrons ici. Le réseau est alors un réseau à sommets trilatères, et nous nous proposons de former de toutes les façons possibles trois demi-trajets qui épuisent toutes les arêtes. Considérons un de ces demi-trajets et imaginons que, dans le réseau, on supprime les arêtes qui figurent dans le demi-trajet; il reste un réseau à sommets bilatères qui peut être connexe ou non. Si le réseau constitue un seul polygone, ses côtés pairs fournissent un demi-trajet, ses côtés impairs donnent le troisième demi-trajet. Si le réseau est formé de plusieurs polygones, il suffit que l'un de ces polygones ait un nombre impair de côtés pour que l'on ne puisse pas former de demi-trajet avec les arêtes qui restent; lorsque tous les polygones ont un nombre pair de côtés, on peut, de plusieurs façons, former les demi-trajets complémentaires, de  $2^{l-1}$  façons s'il y a  $l$  polygones.

Nous allons considérer successivement les différentes configurations  $(33)_{10}$  de Kantor et étudier les réseaux auxquels conduit chacune d'elles.

#### Configuration A.

On peut écrire une configuration A, où les éléments sont

2 3 5 6 7 8 9 10 11 12,

sous la forme

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 2 & 3 & 5 & 6 & 5 & 6 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 9 & 11 & 8 & 7 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 7 & 10 & 12 & 11 & 10 & 7 & 12 & 9 & 8 \end{array} \right.$$

qui résulte de la suppression des éléments 0, 1, 4 dans  $S_1$ . Les duades qui ne figurent pas dans A peuvent être représentées par le Tableau suivant

2	3	5	6	7	8	9	10
3	6	6	9	8	9	12	11
5	10	12		11	10		
11				12			

correspondant à un réseau à dix sommets trilatères, les arêtes du réseau étant des lignes qui joignent un quelconque des points de la première ligne aux points de la même colonne :

2	2	2	3	...	10
3	5	11	6	...	11



Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes,  $\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$  par exemple, et écrivons au-dessous de chaque demi-trajet les demi-trajets qui complètent avec la première les 15 duades. Lorsqu'un même demi-trajet peut être complété de différentes façons, nous le répéterons avec les différents demi-trajets qui le complètent; lorsqu'un demi-trajet ne peut être complété, nous indiquerons entre crochets un polygone d'un nombre impair de côtés formé avec les duades non employées et dont l'existence entraîne l'impossibilité des demi-trajets complémentaires.

On obtient de la sorte les Tableaux suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 7 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 8 & 12 & 11 \end{array} \right. \\ [2 \quad 5 \quad 12 \quad 7 \quad 11]$$

$$(a_1) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 11 & 10 & 12 \\ 2 & 12 & 8 & 6 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 3 & 11 \\ 5 & 7 & 9 & 3 & 11 \\ 12 & 8 & 6 & 10 & 2 \end{array} \right.$$

$$(a_2) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 7 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 12 & 9 & 11 \\ 2 & 12 & 6 & 10 & 7 \\ 5 & 9 & 3 & 8 & 11 \\ 5 & 9 & 3 & 8 & 11 \\ 12 & 6 & 10 & 7 & 2 \end{array} \right.$$

$$(a_3) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 6 & 7 & 10 \\ 3 & 12 & 9 & 8 & 11 \\ 2 & 6 & 10 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 8 & 12 & 11 \\ 5 & 3 & 8 & 12 & 11 \\ 6 & 10 & 9 & 7 & 2 \end{array} \right.$$

$(a_4)$	2	5	6	7	8	
	3	12	9	11	10	
	2	6	10	7	9	
	5	3	11	8	12	
	5	3	11	8	12	
	6	10	2	9	7	
	/	2	5	6	7	8
	3	12	9	11	10	
$(a_1)$	2	6	10	7	9	
	5	3	11	12	8	
	5	3	11	12	8	
	6	10	2	9	7	

Remarquons tout d'abord que si l'on forme, avec les éléments 0, 1, 4, la suite des triades déduites des demi-trajets  $a_4$  :

1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4
0	2	5	6	7	8	2	6	10	7	9	5	3	11	12	8
4	3	12	9	11	10	5	3	11	12	8	6	10	2	9	7,

on retrouve toutes les triades qui, avec celles contenues déjà dans A, constituent  $S_1$ .

Nous pouvons écrire symboliquement cette proposition de cette façon

$$A + (1, 0, 4) a_1 \equiv S_1.$$

Ceci posé, remarquons que la substitution cyclique

$$\sigma_a = (7, 3, 12, 10, 5, 8, 2, 9, 11, 6)$$

laisse A inaltérable, mais permute entre eux les Tableaux  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ ; on a en effet

$$\sigma_a a_1 = a_2, \quad \sigma_a a_2 = a_3, \quad \sigma_a a_3 = a_4, \quad \sigma_a a_4 = a_5, \quad \sigma_a a_5 = a_1,$$

les rangées des Tableaux se correspondant dans un certain ordre. Nous concluons de là que, en désignant dans chaque cas par  $a, b, c$  les

éléments 0, 1, 4 pris dans un ordre convenablement choisi, on aura les relations

$$\sigma_a[A + (a, b, c) a_6] \equiv S_1,$$

$$\sigma_a^2[A + (a, b, c) a_4] \equiv S_1,$$

$$\sigma_a^3[A + (a, b, c) a_3] \equiv S_1,$$

$$\sigma_a^4[A + (a, b, c) a_2] \equiv S_1,$$

c'est-à-dire que la configuration A fournit un, et un seul, système de triades qui n'est autre que  $S_1$ .

### Configuration B.

On peut écrire une configuration B, où les éléments sont

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9,

sous la forme

$$(B) \quad \begin{cases} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 5 & 5 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 9 & 7 & 9 & 8 & 8 & 9. \end{cases}$$

Les duades qui ne figurent pas dans B peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	1	2	3	4	5	6
7	4	3	6	5	7	7
8	6	5	9	9		
9	8	8				

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes,  $\overset{0}{7}$  par exemple, et essayons de les compléter; nous arrivons aux résultats suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 7 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 5 \\ [0 \quad 8 \quad 1 \quad 4 \quad 9] \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 7 \quad 8 \quad 5 \quad 6 \quad 9 \\ 0 \quad 8 \quad 2 \quad 3 \quad 9; \end{array} \right.$$

c'est-à-dire qu'il n'existe pas de groupes de trois demi-trajets épuisant

toutes les duades. La configuration B ne fournit aucun système de triades.

Le réseau que nous avons ainsi rencontré est intéressant à un autre point de vue; il nous offre un exemple d'un réseau à sommets trilatères tel qu'il n'existe aucun contour fermé ou aucun ensemble de contours fermés, comprenant chacun un nombre pair d'arêtes, qui passe par tous les sommets.

### Configuration C.

On peut écrire une configuration C, où les éléments sont

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9,

sous la forme

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 7 & 7 & 7 & 4 & 4 & 8 & 8 & 9 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 2 & 3 & 9 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 1 & 6 & 0 & 6 & 5 & 5 & 0 & 0. \end{array} \right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans C sont précisément les mêmes que celles que nous avons déduites de l'examen de la configuration B, et avec lesquelles on ne peut former de groupes de demi-trajets.

La configuration C ne fournit aucun système de triades.

### Configuration D.

On peut écrire une configuration D, où les éléments sont

1 2 3 4 5 6 7 10 11 12,

sous la forme

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 1 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 11 & 4 & 10 & 5 & 7 & 10 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 7 & 12 & 11 & 12 & 11 & 10 & 7. \end{array} \right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans D peuvent être représentées par le Tableau suivant :

1	2	3	4	5	7	10
4	5	6	7	10	12	11
<i>6</i>	<i>6</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>11</i>		
10	7	12				

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes,  $\frac{1}{4}$  par exemple, et écrivons-les avec les demi-trajets qu'ils admettent :

$$(d_1) \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 12 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 12 & 11 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 11 & 10 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right.$$

$$(d_2) \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 11 & 10 & 12 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 11 \\ 6 & 12 & 7 & 5 & 10 \\ 6 & 12 & 7 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 2 & 11 & 1 \end{array} \right.$$

Remarquons que la substitution

$$\sigma_d = (1) (2) (3) (6) (11, 12) (5, 7) (4, 10)$$

laisse D inaltéré, mais permute entre eux les Tableaux  $(d_1)$  et  $(d_2)$ . Or la forme que nous avons choisie pour D résulte de la suppression des éléments 0, 8, 9 dans  $S_1$ . On voit alors immédiatement que l'on a

$$D + (0, 9, 8) d_1 \equiv S_1$$

et, d'autre part,

$$\sigma_d [D + (a, b, c) d_2] \equiv S_1,$$

$a, b, c$  étant les éléments 0, 8, 9 placés dans un ordre convenablement choisi, c'est-à-dire que la configuration D fournit un et un seul système de triades, qui n'est autre que  $S_1$ .

### Configuration E.

On peut écrire une configuration E, où les éléments sont

$$0 \quad 1 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 10 \quad 11 \quad 12,$$

sous la forme

(E)

6	8	5	12	0	7	4	12	0	1
4	5	12	0	11	10	8	11	1	10
5	11	1	7	10	6	7	6	4	8.

Les duades qui ne figurent pas dans E peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	1	4	5	6	7	8	10
5	6	10	7	8	11	12	12
6	7	11	10				
8	11	12					

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes,  $^0_5$  par exemple, et écrivons-les soit avec un des polygones d'un nombre impair de côtés qui empêchent l'existence des demi-trajets complémentaires, soit avec les demi-trajets complémentaires quand ils existent :

(e)

{	0	1	8	4	7
	5	6	12	10	11
	[0 6 8]				
{	0	1	4	6	10
	5	7	11	8	12
	0	1	7	10	12
	6	11	5	4	8
	6	11	5	4	8
	1	7	10	12	0

La forme que nous avons choisie pour E résulte de la suppression des éléments 2, 3, 9 dans  $S_2$ . On voit alors immédiatement que l'on a

$$E + (2, 3, 9) e \equiv S_2,$$

c'est-à-dire que la configuration E fournit un seul système de triades qui n'est autre que  $S_2$ .

*Configuration F.*

On peut écrire une configuration F, où les éléments sont

0	1	2	3	7	8	9	10	11	12,
---	---	---	---	---	---	---	----	----	-----

sous la forme

	0	0	0	1	1	2	3	1	2	3
(F)	7	9	11	2	11	7	9	8	10	12
	12	8	10	3	7	9	11	10	12	8.

Les duades qui ne figurent pas dans F peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	1	2	3	7	8	9	11
1	9	8	7	8	11	10	12
2	12	11	10	10		12	
3							

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes,  $^0_1$  par exemple, et écrivons-les soit avec un des polygones d'un nombre impair de côtés qui empêchent l'existence des demi-trajets complémentaires, soit avec les demi-trajets complémentaires quand ils existent.

	0	2	3	9	11
	1	8	7	10	12
	[1	9	12]		
	0	2	3	7	9
	1	11	10	8	12
(f)	0	8	12	9	7
	2	11	1	10	3
	2	11	1	10	3
	8	12	9	7	0

La forme que nous avons choisie pour F résulte de la suppression des éléments 4, 5, 6 dans  $S_1$ . On voit alors immédiatement que l'on a

$$F + (4, 5, 6)f \equiv S_1,$$

c'est-à-dire que la configuration F fournit un seul système de triades, qui n'est autre que  $S_1$ .

*Configuration G.*

On peut écrire une configuration G, où les éléments sont

0	4	5	6	7	8	9	10	11	12,
---	---	---	---	---	---	---	----	----	-----

sous la forme

$$(G) \quad \begin{cases} 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 10 & 5 & 7 & 12 & 8 & 9 & 11 & 10 \\ 12 & 9 & 11 & 6 & 8 & 9 & 11 & 10 & 12 & 7. \end{cases}$$

Les duades qui ne figurent pas dans  $G$  peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	4	5	6	7	8	9	10
4	10	6	8	9	10	11	12
5	11	12	9	11	12		
6							

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes,  $0_4$  par exemple, et écrivons-les avec les demi-trajets complémentaires qu'ils admettent.

$$(g_2) \quad \begin{cases} 0 & 5 & 6 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 8 & 11 & 12 \\ 0 & 12 & 10 & 11 & 9 \\ 5 & 8 & 4 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 4 & 7 & 6 \\ 12 & 10 & 11 & 9 & 0 \end{cases}$$

$$(g_1) \quad \begin{cases} 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 12 & 9 & 11 & 10 \\ 0 & 7 & 11 & 10 & 8 \\ 5 & 9 & 4 & 12 & 6 \\ 5 & 9 & 4 & 12 & 6 \\ 7 & 11 & 10 & 8 & 0 \end{cases}$$

La forme que nous avons choisie pour  $G$  résulte de la suppression des éléments 1, 2, 3 dans  $S_1$ . D'autre part, la substitution

$$\sigma_g = (0) (4) (5) (6) (7, 12) (8, 9) (10, 11)$$

laisse inaltérée  $G$ , mais permute entre eux les Tableaux  $g_1$  et  $g_2$ . On reconnaît donc immédiatement que l'on a

$$G + (1, 2, 3) g_1 \equiv S_1,$$



et, d'autre part,

$$\sigma_p[G + (a, b, c) g_1] \equiv S_1,$$

$a, b, c$  étant les éléments 1, 2, 3 placés dans un ordre convenablement choisi; c'est-à-dire que la configuration  $G$  fournit un et un seul système de triades, qui n'est autre que  $S_1$ .

### Configuration H.

On peut écrire une configuration H, où les éléments sont

0 2 3 4 5 6 7 8 9 10 12,

sous la forme

	3	5	5	5	4	6	4	6	9	2
(H)	8	4	9	0	3	3	12	8	0	10
	12	6	10	2	10	0	9	2	8	12.

Les duades qui ne figurent pas dans H peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	2	3	4	5	6	8
4	3	5	8	8	9	10
10	4	9		12	10	
12	9				12	

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes,  $0_4$  par exemple, et inscrivons-les avec les demi-trajets complémentaires qu'ils admettent :

	0	2	5	6	8
	4	3	12	9	10
( $h_1$ )	0	6	2	8	3
	10	12	4	5	9
	10	12	4	5	9
	6	0	8	3	2

	0	2	5	6	8
	4	3	12	9	10
( $h'$ )	0	6	2	3	8
	10	12	9	5	4
	10	12	9	5	4
	6	0	3	8	2

$$(h_2) \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 3 & 6 & 8 \\ 4 & 9 & 5 & 12 & 10 \\ 0 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 2 & 8 & 12 \\ 10 & 9 & 2 & 8 & 12 \\ 5 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{array} \right.$$

La forme que nous avons choisie pour H résulte de la suppression des éléments 1, 7, 11 dans  $S_1$ . D'autre part, la substitution

$$\sigma_h = (3) (5) (8, 12) (2, 9) (0, 10) (4, 6)$$

laisse inaltérée H, mais permute entre eux les Tableaux  $h_1$  et  $h_2$ . On reconnaît donc immédiatement que l'on a

$$H + (1, 11, 7) h_1 \equiv S_1,$$

et, d'autre part,

$$\sigma_h [H + (a, b, c) h_2] \equiv S_1,$$

$a, b, c$  étant les éléments 1, 7, 11 placés dans un ordre convenablement choisi.

Relativement à  $h'$ , remarquons que, si l'on échange respectivement

$$3 \quad 5 \quad 8 \quad 12 \quad 2 \quad 9 \quad 0 \quad 10 \quad 4 \quad 6$$

en

$$0 \quad 1 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 9 \quad 5 \quad 6 \quad 3 \quad 2,$$

H devient

$$(H'_1) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 9 & 12 \\ 10 & 3 & 9 & 5 & 0 & 0 & 11 & 10 & 5 & 6 \\ 11 & 2 & 6 & 12 & 6 & 5 & 9 & 12 & 10 & 11, \end{array} \right.$$

qui est la forme H résultant de la suppression des éléments 4, 7, 8 dans  $S_1$ .

$h'$  devient par cette substitution

$$(h'_1) \left\{ \begin{array}{ccccc} 3 & 12 & 1 & 2 & 10 \\ 5 & 0 & 11 & 9 & 6 \\ 5 & 2 & 12 & 0 & 10 \\ 6 & 11 & 9 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 11 & 0 & 10 & 12 \end{array} \right.$$

et l'on voit immédiatement que l'on a

$$H_1 + (7, 4, 8) h'_1 \equiv S_1.$$

La configuration H fournit donc un seul système de triades, qui n'est autre que  $S_1$ .

*Configuration J.*

On peut écrire une configuration J, où les éléments sont

$$0 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 8 \quad 10 \quad 11 \quad 12,$$

sous la forme

$$(J) \quad \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 2 & 2 & 2 & 0 & 5 & 4 & 12 & 5 & 4 & 12 \\ 0 & 11 & 10 & 11 & 8 & 3 & 7 & 3 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 12 & 10 & 11 & 10 & 0 & 7 & & 3. \end{array} \right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans J peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	2	3	4	5	7	8	11
3	3	11	5	10	10	10	12
4	7		12	12	11		
8	8						

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes,  ${}^0_3$  par exemple, et écrivons-les avec les demi-trajets complémentaires qu'ils admettent :

$$(j_1) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 4 & 8 & 11 \\ 3 & 7 & 5 & 10 & 12 \\ 0 & 12 & 10 & 11 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 3 & 8 \\ 12 & 10 & 11 & 2 & 0 \end{array} \right.$$

$$(j_2) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 4 & 7 & 11 \\ 3 & 8 & 5 & 10 & 12 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 11 \\ 4 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ 12 & 10 & 0 & 11 & 2 \end{array} \right.$$

$$(j') \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 4 & 7 & 11 \\ 3 & 8 & 5 & 10 & 12 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 11 \\ 4 & 5 & 8 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 7 & 3 \\ 12 & 10 & 0 & 11 & 2 \end{array} \right.$$

$$(j_s) \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 12 & 10 & 11 \\ 0 & 5 & 11 & 2 & 10 \\ 4 & 12 & 3 & 7 & 8 \\ 4 & 12 & 3 & 7 & 8 \\ 5 & 11 & 2 & 10 & 0 \end{array} \right.$$

La forme que nous avons choisie pour  $J$  résulte de la suppression des éléments 1, 6, 9 dans  $S_1$ . D'autre part, la substitution

$$\tau_j = (2) (7, 3, 8) (4, 5, 12) (0, 10, 11)$$

laisse inaltérée  $J$ , mais change  $j_1$  en  $j_2$ , et  $j_2$  en  $j_3$ . On reconnaît donc immédiatement que l'on a

$$J + (6, 1, 9) j_1 \equiv S_1$$

et, d'autre part,

$$\tau_j [J + (a, b, c) j] \equiv S_1,$$

$$\tau_j^2 [J + (a, b, c) j] \equiv S_1.$$

$a, b, c$  étant les éléments 1, 6, 9 placés dans un ordre convenablement choisi.

Relativement à  $j'$ , remarquons que la forme que nous avons choisie pour  $J$  résulte aussi de la suppression des éléments 1, 6, 9 dans  $S_2$ . On en conclut la relation

$$J + (6, 1, 9) j' \equiv S_2.$$

La configuration  $J$  fournit donc deux systèmes de triades, mais ces systèmes de triades ne sont autres que  $S_1$  et  $S_2$ .

#### Configuration K.

On peut écrire une configuration K, où les éléments sont

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 10 \quad 11,$$

sous la forme

$$(K) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 11 & 2 & 10 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 8 & 6 & 5 & 8 & 6 & 7 & 10 & 2 \\ 11 & 2 & 10 & 3 & 8 & 6 & 7 & 5 & 11 & 3. \end{pmatrix}$$

Les duades qui ne figurent pas dans K peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	1	2	3	5	6	7
1	5	7	8	6	11	8
7	6	10	10	10		
8		11	11			

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes,  $^0_1$  par exemple, et écrivons-les soit avec un des polynômes d'un nombre impair de côtés qui empêchent l'existence des demi-trajets complémentaires, soit avec les demi-trajets complémentaires, quand ils existent :

$$\left( \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 8 & 10 & 11 \\ & | & 1 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

$$(k_2) \quad \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 8 & 11 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 5 & 3 \\ 7 & 11 & 1 & 10 & 8 \\ 7 & 11 & 1 & 10 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$(k_1) \quad \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 11 & 8 & 10 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 3 \\ 7 & 10 & 1 & 11 & 8 \\ 7 & 10 & 1 & 11 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

La forme que nous avons choisie pour K résulte de la suppression des éléments 4, 9, 12 dans  $S_1$ . D'autre part, la substitution

$$\sigma_k = (0, 1) (2, 10, 3, 11) (5, 8, 6, 7)$$

laisse  $K$  inaltérée, mais change  $k_1$  en  $k_2$ . On reconnaît donc immédiatement que l'on a

$$K + (4, 12, 9) k_1 \equiv S_1$$

et, d'autre part,

$$\sigma_k[K + (a, b, c) k_2] \equiv S_1,$$

$a, b, c$  étant les éléments 4, 9, 12 placés dans un ordre convenablement choisi; c'est-à-dire que la configuration  $K$  fournit un et un seul système de triades, qui n'est autre que  $S_1$ .

En résumé, il n'y a que deux systèmes distincts de triades de 13 éléments. Dans la constitution de l'un d'eux, nous reconnaissons la présence des configurations  $(3\bar{3})_{10}$  des symboles  $A, D, F, G, H, J$  et  $K$ ; dans la constitution du second n'existent que les configurations  $E$  et  $J$ .

Les configurations  $B$  et  $C$  ne donnent naissance à aucun système de triades, mais fournissent un réseau à sommets trilatères, curieux au point de vue des trajets que l'on peut former avec ses arêtes.



LES

# COSEGMENTS ET LES VOLUMES

EN

## GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

**Par M. P. BARBARIN**  
PROFESSEUR AU LYCÉE DE BORDEAUX

Ce mémoire contient deux parties :

1° Dans la première, nous voulons établir certaines relations nouvelles entre les côtés mêmes d'un triangle et les fonctions circulaires de ses angles ;

2° Dans la deuxième, nous nous proposons de faire connaître un mode particulier d'évaluation des volumes, et, en l'appliquant à la pyramide et au prisme, de démontrer une proposition curieuse et remarquable qui est pour l'espace l'analogue de ce que Lambert a reconnu pour le plan.

### **I. — Relations entre les côtés d'un triangle et les fonctions circulaires de ses angles.**

On sait que la formule fondamentale de la trigonométrie générale

$$(1) \quad Ca = Cb.Cc + \varepsilon Sb.Sc.\cos A,$$

dans laquelle :

$\varepsilon = 1$  caractérise les triangles riemanniens,  $C$  et  $S$  étant les fonctions circulaires, tandis que  $\varepsilon = -1$  s'applique aux triangles lobatschewskiens,  $C$  et  $S$  étant cette fois les fonctions hyperboliques, peut à l'aide de développements en série se ramener à celle-ci :

$$(2) \quad a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \cos A = f(a, b, c, L)$$

$f$  étant une certaine fonction qui a zéro pour limite quand le paramètre fondamental  $L$  du plan non euclidien croît au delà de toute



grandeur; c'est même ainsi que la géométrie euclidienne peut être envisagée comme la limite des géométries riemannienne et lobatschewskienne.

Il nous paru intéressant de chercher à démontrer directement la relation (2) et, par ce moyen, de donner à la fonction  $f$  une signification géométrique. Chemin faisant, nous allons rencontrer des relations singulières entre *les côtés du triangle et les fonctions de ses angles*, alors que nous ne connaissons jusqu'ici que des relations entre *les fonctions des côtés et celles des angles*.

Si, dans un triangle isocèle ABC, où

$$a = b, \quad \text{angle A} = \text{angle B},$$

on tire la hauteur CD, la fonction  $f$  se réduit à

$$2bc \cos A - c^2 = 2c(AC \cos A - AD).$$

Son signe et son sens géométrique sont intimement liés à celui de l'expression

$$u = \epsilon(AD - AC \cos A).$$

Nous prouverons d'abord que l'expression  $u$  est toujours positive ou nulle.

En effet, dans le triangle ADC rectangle en D, si l'angle A demeure invariable, et qu'on fasse tendre simultanément AC et AD vers zéro, le rapport  $\frac{AD}{AC}$  tend vers une limite déterminée qui *par définition* est  $\cos A$ ; il atteint cette limite en décroissant, en demeurant constant, ou en croissant suivant que la figure est riemannienne, euclidienne, ou lobatschewskienne; donc, suivant que  $\epsilon$  est égal à  $+1$  ou à  $-1$ ,  $\frac{AD}{AC}$  est supérieur ou inférieur à  $\cos A$ , ce qui justifie la proposition.

Nous donnons pour abrégé le nom de *cosegment* au produit  $AC \cos A$ , inférieur ou supérieur à la projection AD.

Évaluons la différentielle de  $u$ ,  $D'C'$  étant infiniment voisine de DC; nous avons

$$u' = \epsilon(DD' - CC' \cos A);$$

en tirant CE perpendiculaire sur  $C'D'$ , CE est aussi l'arc d'hypercycle de base  $DD'$  qui a DC pour hauteur. A l'aide des triangles rectangles

$C'AD'$ ,  $CEC'$ , nous avons donc (par exemple sur le plan riemannien),

$$\cos A = \sin C' \cos C'D', \quad \sin C' = \frac{\sin CE}{\sin CC'} = \frac{CE}{C'C'},$$

et enfin

$$CE = DD' \cos DC;$$

d'où

$$u' = \epsilon DD' (1 - \cos DC \cos D'C') = \epsilon DD' (1 - \cos^2 DC) = DD' \sin^2 DC.$$

Mais la différentielle de  $u'$  par rapport à  $DC$  est à son tour

$$\begin{aligned} u'' &= 2DD' \sin DC \cdot \cos DC \times CC_1 \\ &= (2 \sin DC \times CC_1) \times CE. \end{aligned}$$

Prenons  $L$  pour unité de longueur, pour unité d'aire le trapèze hypercyclique  $T$  qui a  $L$  pour base et une hauteur  $U$  dont le sinus circulaire ou hyperbolique est  $\sin U$  ou  $\text{sh } U$  égal à 1. Le produit  $2 \sin DC \times CC_1$  est égal au produit de  $\frac{1}{\pi}$  par l'aire de la couronne circulaire de largeur  $CC_1$  comprise entre les circonférences de rayons  $DC$  et  $DC_1$ . Si en chacun des points de cette couronne nous élevons à son plan une perpendiculaire égale à  $CE$ , nous formons un certain solide élémentaire dont nous conviendrons de dire que le produit  $u''$  est proportionnel au volume, l'unité de volume étant convenablement choisie. En choisissant pour cette unité le solide  $P$  qui a pour base le trapèze plan  $T$ , et dont la face supérieure a pour cote  $H$  telle que

$$\frac{1}{2} \frac{H}{L} + \frac{1}{4} \sin \frac{2H}{L} = 1,$$

nous remarquons que le solide élémentaire  $v''$  dont il vient d'être question est aussi le produit de la révolution du quadrilatère  $CC_1C'E$  autour de  $DD'$ , et que par suite il y a lieu d'écrire les équations

$$(3) \quad v'' = \pi u'',$$

$$(4) \quad v' = \pi u',$$

$$(5) \quad v = \pi u.$$

Dans ces dernières,  $v'$  est le tronc de cône élémentaire engendré par la rotation du trapèze  $DCC'D'$  autour de  $DD'$ ;  $v$  est le volume du cône décrit par le triangle  $ADC$  tournant autour de sa hauteur  $AD$ .

La formule (5) est celle même qu'ont trouvée Lobatschewsky (*Crelle*, vol. XVII, page 311), et M. Simon (*Math. Annalen*, 1893, page 473, formule 4).

Le grand géomètre russe part de cette idée fondamentale que la valeur de l'élément différentiel du volume est la même dans la géométrie imaginaire et dans la géométrie usitée pourvu que cet élément soit du troisième ordre (*loc. cit.*, page 302); il parvient à l'expression du cône après trois intégrations; notre définition particulière du volume revient donc à la sienne.

Quand on passe de la géométrie générale à l'eulidienne en faisant croître  $L$  au delà de toute grandeur, la formule (5) se transforme en le théorème des projections; mais pour  $L$  fini elle conduit à ce théorème important :

**THÉORÈME.** — *Si l'on considère un contour  $ABC...GH A$  fermé, et parcouru dans un sens déterminé par un mobile, ainsi qu'un axe dirigé  $x'x$  de son plan, qui ne le coupe pas, mais peut contenir un côté, la somme algébrique des cosegments est proportionnelle au volume engendré par la rotation du contour autour de l'axe.*

Nous choisirons le sens du parcours de sorte que la somme algébrique des cosegments soit toujours positive; pour cela, nous imaginerons un observateur debout sur le plan, ayant ses pieds sur l'axe, la direction positive de l'axe sur sa droite, et regardant le contour; le mouvement du mobile lui paraîtra alors s'effectuer dans le sens des aiguilles d'une montre.

Dans l'énoncé du théorème, nous admettons que le contour n'offre pas de nœud; mais s'il a un nœud simple, la somme algébrique des cosegments est proportionnelle à la différence des volumes engendrés par les deux boucles (1).

(1) Lorsque la génératrice rectiligne du tronc de cône ne coupe pas l'axe de révolution, si nous désignons par  $N$  la normale commune à ces deux droites, normale qui reste constante pendant le mouvement, le volume du tronc de cône d'arête  $a$  est exprimé par la formule

$$(5) \quad V = \pi \varepsilon (h - a \cos N),$$

et selon que  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $\cos N$  est une fonction circulaire ou hyperbolique. Cette substitution de la normale  $N$  à l'angle  $\alpha$  dans le cosegment rentre dans notre théorème général; elle est facultative pour la géométrie riemannienne, mais obligatoire pour la géométrie lobatschewskienne.

On pourrait quelque peu s'étonner de ce que la proposition qui précède n'ait pas été explicitement formulée par Lobatschewsky et ses continuateurs; pour essayer de l'expliquer, observons d'abord que, dans l'ordre de leurs calculs, la formule (4) a précédé probablement la formule (5), tandis que c'est l'inverse en géométrie euclidienne; de plus, pour Lobatschewsky, l'élément différentiel des corps de révolution n'était pas nécessairement toujours un tronc de cône,

Appliquons maintenant le théorème à un triangle ABC. Soient  $V_a$ ,  $V_b$ ,  $V_c$ , les volumes qu'il engendre en tournant successivement autour de ses trois côtés  $a = \frac{BC}{L}$ ,  $b = \frac{CA}{L}$ ,  $c = \frac{AB}{L}$ . Nous avons d'abord le système de relations

$$(I) \quad \frac{a - b \cos C - c \cos B}{V_a} = \frac{b - c \cos A - a \cos C}{V_b} \\ = \frac{c - a \cos B - b \cos A}{V_c} = \frac{1}{\pi \varepsilon}.$$

Si le triangle était rapporté à des unités de longueur, de surface, et de volume indépendantes de  $L$ , et arbitraires, il y aurait simplement lieu, dans les relations précédentes, de remplacer  $\frac{1}{\pi}$  par un certain nombre déterminé  $\lambda$  ayant zéro pour limite quand  $L = \infty$ .

Posons maintenant

$$aV_a - bV_b - cV_c = \gamma_a,$$

$$bV_b - cV_c - aV_a = \gamma_b,$$

$$cV_c - aV_a - bV_b = \gamma_c;$$

nous en déduirons le nouveau système

$$(II) \quad \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \cos A}{\gamma_a} = \frac{b^2 - c^2 - a^2 + 2ca \cos B}{\gamma_b} \\ = \frac{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos C}{\gamma_c} = \frac{1}{\pi \varepsilon}$$

qui donne les significations géométriques de la fonction  $f$  applicables à chaque côté du triangle. Si les unités de mesure deviennent quelconques,  $\frac{1}{\pi}$  est encore remplacé par  $\lambda$ , et, pour  $L = \infty$ , les trois fonctions  $f$  deviennent effectivement nulles, ce qui est conforme aux prévisions.

Soient  $V_a$ ,  $V_b$  et  $V_c$  les volumes que le triangle ABC de mêmes côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  engendrerait en géométrie euclidienne,  $V_a$ ,  $V_b$  et  $V_c$  ont alors pour limites  $V'_a$ ,  $V'_b$  et  $V'_c$ , et comme l'on a

$$a V'_a = b V'_b = c V'_c,$$

l'on en déduit sans peine que, dans cette géométrie particulière, les longueurs  $a - b \cos C - c \cos B$ ,  $b - c \cos A - a \cos C$ ,  $c - a \cos B - b \cos A$  sont respectivement en raison inverse des côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , tandis que les fonctions aires  $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \cos A$ ,  $b^2 - c^2 - a^2 + 2ca \cos B$ ,  $c^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos C$  ont leurs rapports mutuels égaux à l'unité.

Il en serait de même en géométrie générale si le triangle ABC était tel que l'on eût

$$a V_a = b V_b = c V_c,$$

c'est-à-dire évidemment

$$\gamma_a = \gamma_b = \gamma_c.$$

Enfin, si l'on résout les équations (II) par rapport à  $\sin A$ ,  $\sin B$  et  $\sin C$ , et si l'on pose

$$\begin{aligned} R_a &= \sqrt{\left[4p(p-a) + \frac{\gamma_a}{\pi \varepsilon}\right] \left[4(p-b)(p-c) - \frac{\gamma_a}{\pi \varepsilon}\right]} \\ R_b &= \dots \\ R_c &= \dots \end{aligned}$$

on obtient le troisième système de relations

$$(III) \quad \frac{\left(\frac{a}{\sin A}\right)}{\frac{1}{R_a}} = \frac{\left(\frac{b}{\sin B}\right)}{\frac{1}{R_b}} = \frac{\left(\frac{c}{\sin C}\right)}{\frac{1}{R_c}} = 2abc,$$

que nous nous proposons d'établir, et qui constitue une généralisation singulière de la proportion des sinus en géométrie usitée; on retrouve cette proportion même quand on remplace  $\frac{1}{\pi}$  par  $\lambda$  et qu'on fait tendre  $\lambda$  vers zéro. Quand on donne les côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  du triangle ABC, il n'est pas nécessaire de recourir au calcul préliminaire des angles pour obtenir les volumes  $V_a$ ,  $V_b$  et  $V_c$ . En effet, les équations (II) nous donnent le moyen d'exprimer  $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$  et  $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$ , et d'autre part la résolu

tion habituelle du triangle donne aussi ces mêmes quantités en fonction de  $\sin p$ ,  $\sin(p-a)$ ,  $\sin(p-b)$ , et  $\sin(p-c)$ ; d'où par exemple l'équation

$$\frac{4(p-b)(p-c) - \frac{\gamma_a}{\pi\varepsilon}}{4p(p-a) + \frac{\gamma_a}{\pi\varepsilon}} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)},$$

et deux analogues. Nous en déduirons  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$ ,  $\gamma_c$ , et par conséquent  $V_a$ ,  $V_b$ , et  $V_c$ .

## II. — Mesure de certains volumes.

### 1) Formule générale.

Soit un corps solide terminé par une surface  $\Sigma$ . Joignons deux points A et B de cette surface par une droite, et faisons passer par AB deux plans sécants infiniment voisins dont l'angle dièdre soit  $d\omega$ . Ils coupent  $\Sigma$  suivant deux courbes ACB, AC'B infiniment voisines, et enferment un fuseau qui appartient au solide de révolution décrit par le segment  $\overrightarrow{ABCA}$  tournant autour de AB. Soit  $dS \cos \alpha$  le cosegment relatif à l'élément  $dS$  d'arc de la courbe BCA, parcouru dans le sens indiqué à la page 28. Le volume entier du solide de révolution est, d'après le théorème des cosegments,

$$(6) \quad V = \pi\varepsilon \left[ AB - \int_B^A dS \cos \alpha \right],$$

donc le volume du fuseau d'angle  $d\omega$  vaut

$$dV = \frac{\varepsilon}{2} \left[ AB - \int_B^A dS \cos \alpha \right] d\omega,$$

et enfin, le solide enfermé dans la surface  $\Sigma$  a pour expression

$$(7) \quad V = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[ AB - \int_B^A dS \cos \alpha \right] d\omega,$$

$\omega_1$  et  $\omega_2$  étant les limites de l'intégration. Ces limites extrêmes sont généralement

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 2\pi,$$

moyennant lesquelles l'équation (7) donne un solide entier.

Nous allons appliquer cette méthode aux exemples les plus caractéristiques de la géométrie non euclidienne.

## 2) Sphère, Tore et Pseudosphère.

Pour la sphère, nous avons

$$\cos \alpha = -\cos R \sin \omega, \quad dS = \sin R d\omega;$$

donc, en vertu de l'équation (6),

$$\text{Vol. sphère} = \pi \varepsilon (2R - \sin 2R).$$

Soit maintenant un cercle de rayon  $OM = R$  tournant autour de l'axe  $x'x$  situé à la distance  $OA = a$  supérieure à  $R$ ; évaluons l'amplitude angulaire  $\omega = AOM$  à partir de  $OA$ , et nous avons

$$\cos \alpha = \cos a \cos R \cos \omega - \varepsilon \sin a \sin R,$$

donc

$$\begin{aligned} V &= -\pi \varepsilon \int_0^{2\pi} (\cos a \cos R \cos \omega - \varepsilon \sin a \sin R) \sin R d\omega = 2\pi^2 \sin a \sin^2 R. \\ &= [2\pi \sin a] \times [\pi \sin^2 R], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\text{Vol. tore} = \text{circonf. } OA \times \frac{1}{4} \text{ surface sphère } OM,$$

ce qui est la formule même du tore euclidien généralisée.

Enfin, considérons une tractrice méridienne dont la tangente constante  $MT = a$  se projette sur l'axe suivant  $mT = z$ ; exprimons  $dS$  et  $\alpha$  en fonction de  $z$ , et nous trouvons aisément

$$V = \pi \int_{z_0}^{z_1} tg^2 z dz = 2\pi \varepsilon (tga - a),$$

en prenant pour limites extrêmes  $z_0 = -a$  et  $z_1 = a$ . Voir *Études de géométrie analytique non euclidienne*, page 166.

Comparant la pseudosphère à la sphère de rayon  $a$ , nous avons

$$\frac{\text{Pseudosphère } a}{\text{sphère } a} = \frac{2tga - 2a}{2a - \sin 2a} = \frac{1}{4} + \beta,$$

et, pour  $L = \infty$ , ce rapport a comme limite  $\frac{1}{4}$ .

3) *Ellipsoïde et hyperboloïde.*

Soit d'abord une ellipse ou hyperbole

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} - 1 = 0$$

tournant autour d'un de ses axes AB. Nous avons, d'après des formules connues,

$$dS = \frac{\sqrt{du^2 + dv^2 + \varepsilon(udv - vdu)^2}}{1 + \varepsilon(u^2 + v^2)}, \quad \cos \alpha = \frac{du}{\sqrt{du^2 + dv^2 + (udv - vdu)^2}}$$

et par suite,

$$dS \cos \alpha = \frac{du}{1 + \varepsilon(u^2 + v^2)} = \frac{du}{1 + \varepsilon B + \varepsilon \frac{A-B}{A} u^2};$$

donc

$$(8) \quad I = \int^n dS \cos \alpha = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A-B} \sqrt{1 + \varepsilon B}} \arg. \operatorname{tg} \left[ \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{A} \sqrt{1 + \varepsilon B}} u \right]$$

La tranche de révolution comprise entre le plan de l'équateur et le parallèle à la distance OD = arg. tg u a ainsi pour volume

$$(9) \quad V = \pi \varepsilon (OD - I).$$

Pour tout l'ellipsoïde allongé, soit  $A = \operatorname{tg}^2 a$ ,  $B = \operatorname{tg}^2 b$ , et  $a > b$ ; il faut faire  $u = \operatorname{tg} a$  et doubler l'intégrale (9); or, si l'on appelle  $2\gamma$  la distance focale de la méridienne, l'on a facilement

$$\frac{1}{\sin 2\gamma},$$

et, par suite,

$$(10) \quad V = 2\pi \varepsilon \left( a - \frac{\gamma \sin 2a}{\sin 2\gamma} \right)$$

représente le volume de l'ellipsoïde allongé d'axe majeur  $2a$ . La même formule s'applique à l'ellipsoïde aplati d'axe mineur  $2a$ .



Dans le cas d'un hyperboloïde de révolution autour de  $Ox$ , il faut prendre  $A = -\operatorname{tg}^2 a$ ,  $B = \operatorname{tg}^2 b$ , et

$$I = \frac{\operatorname{tg} a \cos b}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b}} \arg. \operatorname{tg} \left[ \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b \cos b}}{\operatorname{tg} a} u \right].$$

Le foyer est ici sur l'axe transverse perpendiculaire à  $Ox$  et à la distance  $\gamma$  telle que  $\sin \gamma = \cos b \sqrt{\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b}$ . Pour obtenir le volume entier de l'hyperboloïde boyau riemannien défini page 116 de nos *Études*, il faut intégrer de  $OD = -\frac{\pi}{2}$  à  $OD = \frac{\pi}{2}$ , et doubler le résultat, ce qui donne

$$(11) \quad V = 2\pi^2 (1 - \cos b \cos b'),$$

en fonction des axes majeur et mineur  $b$  et  $b'$  du boyau.

Ceci posé, si nous voulons calculer le volume d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, il nous suffit d'employer la formule

$$(12) \quad V = 2\pi \varepsilon a - \frac{\varepsilon}{2} \sin 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\gamma}{\sin 2\gamma} d\omega,$$

dans laquelle  $2a$  désigne le grand axe, et  $2\gamma$  la distance focale de l'ellipse suivant laquelle le plan d'argument  $\omega$  et passant par cet axe coupe la surface.

#### 4) Canal à axe rectiligne.

Soit dans un plan  $P$  une courbe  $C$ , et en un point  $O$  de ce plan l'axe  $x'x$  perpendiculaire. Si l'on fait déplacer le plan  $P$  le long de l'axe, la courbe engendre un canal que tous les plans passant par  $x'x$  coupent suivant des hypercycles; appelons  $AB$  l'arc de l'un d'eux, et  $ab$  sa projection sur l'axe;  $ab$  est constant, et  $AB$  est une fonction de  $\omega$ . Le fuseau de canal compris entre les plans  $A_1 B_1 b a$  et  $A_2 B_2 b a$  d'arguments  $\omega_1$  et  $\omega_2$  vaut

$$V = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\varepsilon}{2} (ab - \widehat{\operatorname{arc} AB} \cos a A) d\omega,$$

ou, puisque  $\operatorname{arc} AB = ab \cos a A$ ,

$$V = \frac{1}{2} ab \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin^2 a A d\omega.$$

Construisons dans le plan  $P$  la courbe  $C'$  homothétique de  $C$ , et telle que  $aA' = 2aA$ ; nous avons, comme il fallait s'y attendre,

$$V = \frac{1}{4} ab \times \text{aire du secteur } \overline{A_1' a A_2'}.$$

### 5) *Pyramide triangulaire.*

Lambert a démontré que l'aire d'un triangle est une fonction de ses angles. Il n'y aurait donc pas lieu d'être surpris que le volume d'une pyramide fût aussi une fonction de ses dièdres; nous allons nous proposer de vérifier qu'il en est réellement ainsi. Pour cela, considérons d'abord le tétraèdre birectangle  $SOHA$  ayant pour base le triangle  $OHA$  rectangle en  $H$ , et dans lequel l'arête  $OS$  est perpendiculaire au plan de ce triangle. Un plan sécant passant par  $OS$  le coupe suivant  $SOM$ , et en faisant

$$OS = h, HS = z_0, MS = z, OSH = \theta_0, OSM = \theta, MOH = \omega,$$

la formule des cosegments donne (Lobatchewsky, *Crelle*, XVII<sup>e</sup> vol., page 311)

$$(13) \quad dV = \frac{\varepsilon}{2} (h - z \cos \theta) d\omega.$$

Coupons le trièdre  $S$  par une sphère ayant son sommet pour centre; le triangle  $omh$  de section est rectangle en  $h$ , et donne

$$moh = \omega, \quad oh = \theta_0, \quad om = \theta,$$

enfin l'angle  $omh$  est égal au rectiligne  $U$  du dièdre  $OSMH$ ; à cause des relations

$$\sin U = \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta}, \quad \cos U = \cos \theta_0 \sin \omega, \quad \cos \omega = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\operatorname{tg} \theta},$$

on a facilement

$$\cos \theta_0 d\omega = -dU,$$

et la formule (13) devient

$$(14) \quad dV = \frac{\varepsilon}{2} (hd\omega + zdU);$$

donc

$$(15) \quad \text{Vol } SOHA = \frac{\varepsilon}{2} \left[ HOA \times h + \text{dièdre } SA \times SA - \frac{\pi}{2} z_0 - \int_{z_0}^{SA=z_1} U dz \right].$$

La formule (15) se vérifie évidemment dans le cas riemannien où  $h = z_0 = z = \frac{\pi}{2}$ , et dièdre  $SA = HAO$ , car elle devient

$$V = \frac{\pi}{4} \times \text{aire } \overline{OHA}.$$

Nous allons maintenant calculer l'intégrale définie  $\int_{z_0}^{z_1} U dz$ . Nous avons pour cela

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg} h}{\cos \theta}, \quad dz = \frac{\operatorname{tg} h \sin \theta d\theta}{\cos^2 \theta + \varepsilon \operatorname{tg}^2 h},$$

et

$$U = \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^3 \theta}{3 \sin^2 \theta} + \dots \\ + \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \cdot \frac{\sin^{2n+1} \theta_0}{2n+1} \cdot \frac{1}{\sin^{2n+1} \theta} + \dots$$

série convergente, puisque  $\theta$  est supérieur à  $\theta_0$ . Donc

$$\int U dz = \operatorname{tg} h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \cdot \frac{\sin^{2n+1} \theta_0}{2n+1} \int \frac{d\theta}{\sin^{2n} \theta (\cos^2 \theta + \varepsilon \operatorname{tg}^2 h)},$$

formule dans laquelle on doit supposer le facteur numérique égal à 1 quand  $n = 0$ .

Posons

$$X_n = \int \frac{d\theta}{\sin^{2n} \theta (\cos^2 \theta + \varepsilon \operatorname{tg}^2 h)},$$

$$Y_n = \int \frac{d\theta}{\sin^{2n} \theta},$$

et nous obtiendrons aisément par les règles ordinaires la formule récurrente

$$X_n = \cos^2 h (X_{n-1} + Y_n),$$

qui permet d'exprimer  $X_n$  en fonction de

$$X_0 = \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta + \varepsilon \operatorname{tg}^2 h} = \text{O.M.} \cotg h \cos h,$$

et des fonctions  $Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1$  par la suite

$$X_n = \cos^2 h (Y_n + \cos^2 h Y_{n-1} + \dots + \cos^{2n-2} h Y_1 + \cos^{2n-2} h X_0).$$

Quant à la fonction  $Y_n$ , une intégration en parties donne la formule connue

$$Y_n = \frac{2n-2}{2n-1} Y_{n-1} - \frac{\cos \theta}{(2n-1) \sin^{2n-1} \theta},$$

d'où

$$Y_n = - \frac{\cos \theta}{(2n-1) \sin^{2n-1} \theta} - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(2n-2)(2n-4)\dots(2n-2p)}{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2p+1)} \times \frac{\cos \theta}{(2n-2p-1) \sin^{2n-2p-1} \theta}.$$

Nous poserons pour abréger

$$X_n = X_0 \cos^{2n} h + Z_n,$$

$$Z_n = \sum_{q=0}^{n-1} Y_{n-q} \cos^{2q+2} h,$$

et nous aurons

$$(16) \quad \int U dz = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} h X_0 \sum_n \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots 2n} \frac{\sin^{2n+1} \theta_0}{2n+1} \cos^{2n} h \\ + \operatorname{tg} h \sum_n \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots 2n} \frac{\sin^{2n+1} \theta_0}{2n+1} Z_n. \end{array} \right.$$

La première partie de cette somme n'est autre que

$$OM \times \operatorname{arc} \sin(\sin \theta_0 \cos h) = OM \times \left( \frac{\pi}{2} - OHS \right),$$

la deuxième est une série négative  $F(\theta)$ , dont il faut avant tout montrer la convergence. Or, en lui appliquant la règle de d'Alembert, nous obtenons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)^2 \sin^2 \theta_0}{(2n+2)(2n+3)} \cdot \frac{Z_{n+1}}{Z_n} = \frac{(2n+1)^2 \sin^2 \theta_0}{(2n+2)(2n+3)} \left( 1 + \frac{Y_{n+1}}{Z_n} \right) \cos^2 h.$$

Proposons-nous d'abord de chercher la limite de  $\frac{Y_{n+1}}{Z_n}$ . Pour cela, nous démontrerons en premier lieu que les fonctions  $Y_{n-1}$ ,  $Y_n$ ,  $Y_{n+1}$ , etc., croissent indéfiniment avec  $n$ .

En effet, en désignant par  $t_n$  la fraction  $\frac{2.4 \dots (2n-2)}{3.5 \dots (2n-1)}$ , nous avons

$$-Y_n = t_n \left[ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{3}{2} \frac{\cos \theta}{3 \sin^3 \theta} + \frac{3.5}{2.4} \frac{\cos \theta}{5 \sin^5 \theta} + \frac{3.5 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n-2)} \frac{\cos \theta}{(2n-1) \sin^{2n-1} \theta} \right]$$

Or, le produit  $(2n-1) \sin^{2n-1} \theta$  a zéro pour limite; donc le terme final de  $Y_n$  est aussi le terme général d'une série divergente, ce dont il est facile de s'assurer du reste en appliquant directement à cette série la règle de d'Alembert.  $Y_{n-1}$  et  $Y_{n+1}$  sont dans le même cas que  $Y_n$ . En second lieu, nous prouverons que  $Y_n (2n-1) \sin^{2n-1} \theta$  a une limite déterminée. Pour cela, écrivons

$$Y_n (2n-1) \sin^{2n-1} \theta = \left( \cos \theta + \frac{2n-2}{2n-3} \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)} \cos \theta \sin^4 \theta + \dots + \frac{(2n-2)(2n-4) \dots 4.2}{(2n-3)(2n-5) \dots 3.1} \cos \theta \sin^{2n-2} \theta \right)$$

Pour  $n = \infty$ , cette somme devient la progression indéfinie qui a pour premier terme  $\cos \theta$  et pour raison  $\sin^2 \theta$ , donc elle a une limite égale à  $\frac{1}{\cos \theta}$ .

De ce résultat, nous déduisons sans peine que  $Y_n (2n+1) \sin^{2n+1} \theta$  a également une limite. Car, d'après la formule de réduction des fonctions  $Y$ , nous avons

$$Y_n (2n+1) \sin^{2n+1} \theta = \frac{2n+1}{2n} \left[ \cos \theta + Y_{n+1} (2n+1) \sin^{2n+1} \theta \right];$$

et puisque

$$\lim Y_{n+1} (2n+1) \sin^{2n+1} \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

nous avons aussi

$$\lim Y_n (2n+1) \sin^{2n+1} \theta = \frac{-\sin^2 \theta}{\cos \theta}.$$

Il en résulte d'ailleurs que

$$\lim \frac{Y_n}{Y_{n+1}} = \sin^2 \theta,$$

et que, par suite,

$$\lim \frac{Y_{n-1}}{Y_n} = \sin^2 \theta,$$

$$\lim \frac{Y_{n-2}}{Y_n} = \sin^4 \theta,$$

$$\lim \frac{Y_{n-3}}{Y_n} = \sin^6 \theta, \text{ etc.}$$

Enfin, si nous exprimons  $Y_{n+1}$  et  $Z_n$  en fonction des quantités  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{Y_{n+1}}{Z_n} &= \frac{2n}{2n+1} \frac{Y_n}{Y_n} - \frac{\cos \theta}{(2n+1) \sin^{2n+1} \theta} \\ &= \frac{2n}{2n+1} - \frac{\cos \theta}{Y_n (2n+1) \sin^{2n+1} \theta} \\ &= \frac{\cos^2 h + \cos^4 h \frac{Y_{n-1}}{Y_n} + \cos^6 h \frac{Y_{n-2}}{Y_n} + \dots + \cos^{2n} h \frac{Y_1}{Y_n}}{\cos^2 h + \cos^4 h \frac{Y_{n-1}}{Y_n} + \cos^6 h \frac{Y_{n-2}}{Y_n} + \dots + \cos^{2n} h \frac{Y_1}{Y_n}} \end{aligned}$$

Le numérateur de cette dernière fraction a pour limite  $\frac{1}{\sin^2 \theta}$ ; le dénominateur a pour limite la somme de la progression indéfinie qui a pour premier terme  $\cos^2 h$  et pour raison  $\cos^2 h \sin^2 \theta = \cos^2 OMS$ ; donc la fraction a aussi pour limite

$$\frac{1 - \cos^2 OMS}{\cos^2 OMS} = \operatorname{tg}^2 OMS.$$

Ainsi,

$$\lim \frac{Y_{n+1}}{Z_n} = \operatorname{tg}^2 OMS;$$

C'est ce que nous nous proposons d'établir. Nous en déduisons

$$\lim \left( 1 + \frac{Y_{n+1}}{Z_n} \right) = \frac{1}{\cos^2 OMS} = \frac{1}{\cos^2 h \sin^2 \theta};$$

par conséquent, pour  $n = \infty$ , nous aurons

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta}$$

limite inférieure à 1, puisque  $\theta_0$  est moindre que  $\theta$ ; donc  $F(\theta)$  est bien une série convergente.

Prenons l'intégrale (16) entre les limites  $z_0$  et  $z_1$ , nous avons

$$\int_{z_0}^{z_1} U dz = OA \left( \frac{\pi}{2} - OHS \right) + F(\theta_1) - OH \left( \frac{\pi}{2} - OHS \right) - F(\theta_0).$$

d'où nous déduisons

$$(17) \quad \text{Vol SOHA} = \frac{\epsilon}{2} \left[ HOA \times h + \text{dièdre SA} \times SA - \frac{\pi}{2} z_0 \right. \\ \left. (OA - OH) \left( \frac{\pi}{2} - OHS \right) + F(\theta_0) - F(\theta_1) \right].$$

Passons maintenant à la pyramide droite SOAB, somme algébrique des deux tétraèdres SOHA, SOHB birectangles; son volume s'exprime généralement par l'équation

$$(18) \quad \text{Vol SOAB} = \frac{\epsilon}{2} \left[ SO \times \text{dièdre SO} + SA \times \text{dièdre SA} + SB \times \text{dièdre SB} + \Phi(BSA) \right],$$

où nous posons

$$\Phi(BSA) = -\pi SH - (OA + OB - 2OH) \left( \frac{\pi}{2} - OHS \right) + 2F(\theta_0) - F(\theta_1) - F(\theta_2),$$

si SA et SB sont de part et d'autre de SH, tandis qu'au contraire l'on a

$$\Phi(BSA) = -\pi SB - (OA - OB) \left( \frac{\pi}{2} - OHS \right) + F(\theta_2) - F(\theta_1),$$

lorsque SA et SB sont du même côté de SH, SB étant plus courte que SA.

#### 6) *Pyramide polygonale, pyramide régulière.*

Soit la pyramide polygonale SABC...G; menons sa hauteur SO, et considérons les pyramides triangulaires SOAB, SOBC... En ajoutant leurs volumes calculés d'après la formule (18), nous avons en général l'équation

$$(19) \quad V = \frac{\epsilon}{2} \left[ \sum SA \times \text{dièdre SA} + \sum \Phi(BSA) + 2K\pi \cdot SO \right] (K=0,1),$$

qui conduit à cet énoncé :

*Le volume d'une pyramide est égal à plus ou moins la moitié de la somme obtenue en ajoutant :*

- 1° *Les produits de chaque arête par le dièdre correspondant ;*
- 2° *Les fonctions  $\Phi$  relatives à chaque face latérale ;*
- 3° *Le produit de la hauteur par zéro ou  $2\pi$ , suivant que cette hauteur tombe hors de la base ou dans la base.*

Le même énoncé subsiste évidemment pour le tronc de pyramide et pour le prismatoïde (volume compris entre un polygone de base, des faces latérales perpendiculaires à son plan, et un plan quelconque). Dans ce dernier, il faut seulement remplacer les angles des arêtes latérales avec la hauteur, c'est-à-dire avec la perpendiculaire commune aux deux plans de base, par les perpendiculaires communes entre ces arêtes et la hauteur.

La formule (19) présente un intérêt particulier si la pyramide est régulière et a  $m$  faces. Soient dans ce cas  $D$  la valeur commune de tous les angles dièdres,  $a$  la longueur des arêtes,  $\theta$  l'angle de chacune avec la hauteur,  $z_0$  l'apothème de chaque face latérale, et  $\theta_0$  l'angle de cette apothème avec la hauteur. Nous avons alors

$$V = \frac{\varepsilon}{2} \left[ 2\pi l - m a D + m \Phi(ASB) \right],$$

avec

$$\Phi(ASB) = -\pi z_0 + 2(OA - OH) \left( \frac{\pi}{2} - OHS \right) + 2F(\theta_0) - 2F(\theta).$$

Si  $m$  devient infini, nous devons retrouver la formule du cône de révolution. Pour cela, remarquons d'abord que dans ce cas

$$\lim \Phi(ASB) = -\pi a.$$

Ceci posé, nous allons démontrer que l'on a

$$\lim m \left( \frac{D}{\pi} - \frac{z_0}{a} \right) = -2 \cos \theta.$$

En effet, nous avons les égalités

$$\cos \frac{D}{2} = \cos \theta_0 \sin \frac{\pi}{m}, \quad D = \pi - 2 \arcsin \left( \cos \theta_0 \sin \frac{\pi}{m} \right) = \pi - 2\alpha,$$

et en faisant  $z_0 = a(1 - \delta)$ , nous pouvons écrire

$$m \left( \frac{D}{\pi} - \frac{z_0}{a} \right) = m \left( \delta - \frac{2\alpha}{\sin \alpha} \cos \theta_0 \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\pi} \right).$$



La limite évidente du second terme est  $-2 \cos \theta$ . Quant à celle du premier, nous l'obtiendrons en écrivant, au moyen de l'angle  $HSA = u$ ,

$$\operatorname{tg} z_0 = \operatorname{tg}(a - \delta a) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} \delta a}{1 + \epsilon \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \delta a} = \operatorname{tg} a \cos u,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \delta a = \frac{\operatorname{tg} a (1 - \cos u)}{1 + \epsilon \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg} \delta a \cos u},$$

$$m \delta = m(1 - \cos u) \frac{\delta a}{\operatorname{tg} \delta a} \frac{\operatorname{tg} a}{a} \frac{1}{1 + \epsilon \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg} \delta a \cos u},$$

mais, à cause de  $\operatorname{tg} u = \sin \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}$ , nous avons

$$m(1 - \cos u) = m \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \frac{\sin^2 \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}}{\left(1 + \sin^2 \theta_0 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

donc  $m(1 - \cos u)$  a zéro pour limite, et  $m \delta$  est évidemment dans le même cas; la proposition énoncée est donc prouvée. Il en résulte que pour  $m = \infty$  l'on a à la fois

$$\lim 2m \left[ (\text{OA} - \text{OH}) \left( \frac{\pi}{2} - \text{OHS} \right) + F(\theta_0) - F(\theta) \right] = 0,$$

et

$$\lim V = \pi \epsilon (h - a \cos \theta).$$

### 7) Prisme.

Supposons que dans le tétraèdre SOHA du paragraphe 5, SA et OA deviennent parallèles à HA; comme le dièdre SA a une limite égale à  $\frac{\pi}{2} - \text{OHS}$  (Lobatschewsky), la formule (17) devient

$$V = -\text{HOA} \times h + \frac{\pi}{2} z_0 - (\text{SA} - \text{OA} + \text{OH}) \left( \frac{\pi}{2} - \text{OHS} \right) - F(\theta_0) + F(\theta_1),$$

et on y a

$$\text{HOA} = \Pi(\text{OH}), \quad \theta_1 = \Pi(h);$$

la différence  $SA - OA$  est finie, et vaut la flèche  $OK$  d'horicycle qui répond à la corde  $2h$ ; par suite, l'expression  $V$  demeure finie, mais on peut la mettre sous une autre forme plus avantageuse. En effet, modifions la figure de sorte que le triangle rectangle  $OHA$  demeurant fini,  $OS = h$  croisse indéfiniment; la pyramide devient un prisme  $OHA - O'H'A'$  indéfini dans lequel, en appliquant la formule des cosegments, c'est-à-dire en menant un plan  $OO'MM'$  sécant, puis construisant l'horicycle qui a  $OO'$  pour axe, passe en  $M$  et coupe  $O'O$  prolongé en  $N$ , nous pouvons écrire

$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\omega} ON d\omega.$$

Appelons  $\alpha$  le complément de l'angle  $OH H' = H(OH)$ , et faisons  $OH = a$ ; nous avons

$$\begin{aligned} ON &= \text{ch } OM = \int \frac{\cos \omega}{\sqrt{\cos^2 \omega - \sin^2 \alpha}} \\ &= \int \cos \omega - \frac{1}{2} \int \cos(\omega + \alpha) - \frac{1}{2} \int \cos(\omega - \alpha). \end{aligned}$$

Mais, soient  $B_1, B_2, \dots, B_n$  les nombres de Bernoulli; nous aurons

$$\begin{aligned} \int \cos \omega d\omega &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n(2n+1)} \frac{\omega^{2n+1}}{2n!} = -f(\omega), \\ \int \cos(\omega - \alpha) d\omega &= -f(\omega - \alpha), \\ \int \cos(\omega + \alpha) d\omega &= -f(\omega + \alpha), \end{aligned}$$

et par suite

$$(20) \quad V = -f(\omega) + \frac{1}{2}f(\omega + \alpha) + \frac{1}{2}f(\omega - \alpha).$$

Delà, nous passerons commodément au tronc de prisme  $HOA - H'O'A'$ , car si  $\alpha'$  et  $\alpha''$  désignent les éléments correspondants de la base supérieure  $H'O'A'$  obtenue en coupant le prisme indéfini de base inférieure  $HOA$  par le plan  $H'O'A'$  perpendiculaire à la hauteur  $OO'$  au point  $O'$ , nous aurons par soustraction

$$(21) \quad V = \frac{1}{2} \left[ f(\omega + \alpha) + f(\omega - \alpha) - f(\omega + \alpha') - f(\omega - \alpha') \right].$$

Du reste,  $\alpha'$  est une fonction simple de  $OO = h$ , car

$$\sin \alpha' = e^h \sin \alpha.$$

M. Simon (*Math. Annalen*, 1893, pages 471 à 488) a repris d'après le procédé de Lobatschewsky le calcul des volumes de la pyramide et du prisme. Dans la pyramide, il a obtenu une intégrale double de forme complexe. On voit que l'introduction du produit de chaque arête par le dièdre correspondant nous a permis de simplifier très heureusement le résultat, et de lui donner une forme nouvelle beaucoup plus accessible. Dans le prisme, M. Simon est parvenu à une formule compliquée d'imaginaires qui se rattache, dans un cas particulier seulement, aux fonctions  $\Gamma$  et aux séries de Fourier. Le seul emploi des nombres  $B_n$  nous a amené à l'expression générale sous forme absolument réelle.



# NOTES SUR QUELQUES POINTS DES THÉORIES ÉLECTRIQUES ET MAGNÉTIQUES

Par P. DUHEM

PROFESSEUR DE PHYSIQUE THÉORIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

## 1<sup>re</sup> NOTE. — Sur l'électrostatique de Maxwell et la polarisation des diélectriques.

Dans son mémoire célèbre *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* et dans son *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, Maxwell a développé une théorie électrostatique nouvelle. Cette théorie repose sur d'étranges contradictions (1). Mais, laissant de côté la voie par laquelle Maxwell est parvenu aux équations fondamentales qui résument cette théorie, on peut, avec Heaviside, avec Hertz, avec Cohn, adopter d'emblée ces équations comme autant de définitions ou d'hypothèses fondamentales; alors, il reste simplement à examiner si quelque conséquence, susceptible d'être soumise au contrôle de l'expérience, différencie cette électrostatique nouvelle de l'électrostatique classique.

Nous avons pu découvrir (2) une telle divergence en étudiant l'action qu'un corps électrisé exerce sur un corps diélectrique et trouver dans les expériences auxquelles cette action a donné lieu, particulièrement dans les recherches de M. Pellat, un argument en faveur de l'ancienne électrostatique et à l'encontre de l'électrostatique de Maxwell. Depuis, nous nous sommes aperçu que notre indication était inexacte et que l'accord des deux électrostatiques était parfait, du moins sous certaines conditions restrictives que nous préciserons. Pour établir l'équivalence des deux théories, il nous a suffi de développer un aperçu

(1) *Les théories électriques de J. Clerk Maxwell, étude historique et critique (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XXV, 2<sup>e</sup> partie, p. 1 et p. 293, 1901, et Paris, A. Hermann, 1901).*

(2) *Ibid.*, 2<sup>e</sup> partie, chap. I, § 4.

donné par M. Liénard <sup>(1)</sup>, aperçu qui découle lui-même des idées que Helmholtz a introduites dans l'étude des corps aimantés et que nous avons plus tard approfondies.

Rappelons d'abord les relations fondamentales de l'électrostatique de Maxwell.

Considérons un système formé d'un conducteur 1 et d'un corps diélectrique 2 plongés dans un milieu isolant homogène 0 et supposons l'équilibre électrique établi sur un tel système.

Il existe une fonction  $\Psi$ , qui est continue dans l'espace et nulle à l'infini.

Cette fonction a la même valeur en tous les points du conducteur 1 supposé connexe.

Elle vérifie l'équation de Laplace,  $\Delta\Psi = 0$ , en tous les points du milieu 0.

A la surface de séparation  $S_{10}$  du conducteur 1 et du milieu 0, on pose

$$(1) \quad E = -\frac{K_0}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial N_0},$$

$N_0$  étant la normale vers l'intérieur du milieu isolant 0, et  $K_0$  un coefficient qui dépend de la nature de ce milieu;  $E$  est ce qu'on nomme la *densité électrique* en un point de la surface  $S_{10}$ .

A l'intérieur du milieu 2, la fonction  $\Psi$  vérifie la relation

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( K_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = 0,$$

$K_2$  étant une quantité qui dépend de la nature du corps 2 au point  $(x, y, z)$ .

Par définition, les quantités

$$(3) \quad f = -\frac{K_2}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad g = -\frac{K_2}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad h = -\frac{K_2}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

sont les composantes du *déplacement* en ce point.

Enfin, à la surface de séparation du milieu 2 et du milieu 0, on a

$$(4) \quad K_0 \frac{\partial \Psi}{\partial N_0} + K_2 \frac{\partial \Psi}{\partial N_2} = 0.$$

<sup>(1)</sup> LIÉNARD, *Au sujet d'une note de M. Pellat sur la polarisation des diélectriques* (Comptes rendus, t. CXXVIII, p. 1568; 1899).

Le travail virtuel  $d\mathcal{U}_e$  des forces extérieures qu'il faut appliquer au système pour le maintenir en équilibre est donné par les formules

$$(5) \quad \begin{cases} d\mathcal{U}_e = \delta U, \\ U = \frac{1}{2} \int \Psi E dS_{10}. \end{cases}$$

Passons maintenant à la doctrine classique de la polarisation diélectrique; nous la prendrons sous la forme que nous lui avons donnée en nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*.

En tout point à l'intérieur du corps 1, on peut considérer une *densité électrique solide*  $\sigma$ ; en tout point de la surface  $S_{10}$  de ce corps, une *densité électrique superficielle*  $\Sigma$ ; en tout point soit du milieu 0, soit du corps 2, un vecteur, la *polarisation*, dont  $\mathcal{A}$  est la grandeur et dont  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  sont les composantes.

Si  $d\tau_0$ ,  $d\tau_1$ ,  $d\tau_2$  désignent respectivement des éléments de volume des corps 0, 1, 2, la *fonction potentielle électrostatique* en un point quelconque du système est

$$(6) \quad V = \int \frac{\Sigma}{r} dS_{10} + \int \frac{\sigma}{r} d\tau_1 + \int \left( \mathcal{A}_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_0} + \mathcal{B}_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_0} + \mathcal{C}_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_0} \right) d\tau_0 \\ + \int \left( \mathcal{A}_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \right) d\tau_2.$$

La fonction  $V$  vérifie, en tout point du conducteur 1, l'équation

$$(7) \quad \Delta V = -4\pi\sigma;$$

en tout point des milieux 0 et 2, l'équation

$$(8) \quad \Delta V = 4\pi \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right);$$

en tout point de la surface  $S_{10}$ , l'équation

$$(9) \quad \frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N_0} = -4\pi\Sigma + 4\pi \left[ \mathcal{A}_0 \cos(N_0, x) + \mathcal{B}_0 \cos(N_0, y) \right. \\ \left. \mathcal{C}_0 \cos(N_0, z) \right];$$

en tout point de la surface  $S_{10}$ , l'équation

$$(10) \quad \frac{\partial V}{\partial N_2} + \frac{\partial V}{\partial N_0} = 4\pi \left[ \mathcal{A}_2 \cos(N_2, x) + \mathcal{B}_2 \cos(N_2, y) + \mathcal{C}_2 \cos(N_2, z) \right. \\ \left. + \mathcal{A}_0 \cos(N_0, x) + \mathcal{B}_0 \cos(N_0, y) + \mathcal{C}_0 \cos(N_0, z) \right].$$

Pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit que l'on ait, pour toute modification isothermique virtuelle,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\mathcal{U}_e = \delta \mathcal{F}, \\ \mathcal{F} = \frac{\varepsilon}{2} \int V \tau d\omega_1 + \frac{\varepsilon}{2} \int V \Sigma dS_{10} \\ \quad + \frac{\varepsilon}{2} \int \left( \mathcal{A}_0 \frac{\partial V}{\partial x_0} + \mathcal{B}_0 \frac{\partial V}{\partial y_0} + \mathcal{C}_0 \frac{\partial V}{\partial z_0} \right) d\omega_0 + \int \mathcal{F}_0(\mathcal{A}_0) d\omega_0 \\ \quad + \frac{\varepsilon}{2} \int \left( \mathcal{A}_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial V}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial V}{\partial z_2} \right) d\omega_2 + \int \mathcal{F}_2(\mathcal{A}_2) d\omega_2. \end{array} \right.$$

La condition (11) entraîne diverses égalités qui doivent être vérifiées en un système en équilibre, conditions que nous nous contenterons d'énoncer :

1° En tout point du conducteur 1,  $V$  doit avoir la même valeur, ce qui nous donne  $\frac{dV}{dN_1} = 0$  et aussi, en vertu de l'égalité (7),

$$(12) \quad \tau = 0.$$

2° Si l'on pose

$$(13) \quad \frac{\mathcal{A}_0}{F_0(\mathcal{A}_0)} = \frac{\partial \mathcal{F}_0(\mathcal{A}_0)}{\partial \mathcal{A}_0}, \quad \frac{\mathcal{A}_2}{F_2(\mathcal{A}_2)} = \frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathcal{A}_2)}{\partial \mathcal{A}_2},$$

on a, aux divers points des corps 0 et 2,

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}_0 = -\varepsilon F_0 \frac{\partial V}{\partial x}, & \mathcal{A}_2 = -\varepsilon F_2 \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \mathcal{B}_0 = -\varepsilon F_0 \frac{\partial V}{\partial y}, & \mathcal{B}_2 = -\varepsilon F_2 \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \mathcal{C}_0 = -\varepsilon F_0 \frac{\partial V}{\partial z}, & \mathcal{C}_2 = -\varepsilon F_2 \frac{\partial V}{\partial z}. \end{array} \right.$$

En général, on admet, à titre d'approximation, que les quantités  $F_0$ ,  $F_2$ , que l'on nomme coefficients de polarisation des corps 0, 2, sont

des quantités indépendantes de  $\mathcal{M}$ ; en chaque point du corps 2,  $F_2$  dépend de la nature du corps 2; le corps 0 étant homogène,  $F_0$  est une constante.

Les égalités (13) deviennent alors

$$(15) \quad \mathcal{F}_0(\mathcal{M}) = \frac{\mathcal{M}^2}{2F_0}, \quad \mathcal{F}_2(\mathcal{M}) = \frac{\mathcal{M}^2}{2F_2}.$$

En vertu des égalités (14), l'égalité (8) devient, en tout point du milieu 0,

$$(16) \quad \Delta V = 0$$

et, en tout point du milieu 2,

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 + 4\pi\epsilon F_2) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1 + 4\pi\epsilon F_2) \frac{\partial V}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1 + 4\pi\epsilon F_2) \frac{\partial V}{\partial z} \right] = 0.$$

L'équation (9) devient

$$(18) \quad (1 + 4\pi\epsilon F_0) \frac{\partial V}{\partial N_0} = -4\pi\Sigma$$

et l'équation (10) devient

$$(19) \quad (1 + 4\pi\epsilon F_0) \frac{\partial V}{\partial N_0} + (1 + 4\pi\epsilon F_2) \frac{\partial V}{\partial N_2} = 0.$$

Si, dans la seconde égalité (11), on remplace  $\mathcal{F}_0(\mathcal{M}_0)$  et  $\mathcal{F}_2(\mathcal{M}_2)$  par les valeurs (15), les  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , par les valeurs (14) et si l'on tient compte de l'identité

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 = \mathcal{M}^2,$$

on trouve simplement

$$(20) \quad \mathcal{F} = \frac{\epsilon}{2} \int V \tau d\omega_1 + \frac{\epsilon}{2} \int V \Sigma dS_{10}.$$

Cette expression ne doit être employée dans le calcul du travail virtuel  $d\mathcal{T}_e$  des actions extérieures que si l'on suppose les égalités (14) constamment vérifiées durant cette modification. Si, en outre, on suppose  $V$  assujetti à garder une même valeur en tous les points du



conducteur 1, cas auquel l'égalité (12) est vérifiée durant la modification virtuelle, on peut réduire l'expression de  $\mathcal{F}$  à

$$(21) \quad \mathcal{F} = \frac{\varepsilon}{2} \int V \Sigma dS_{10}.$$

Ces préliminaires posés, il est facile d'établir l'équivalence des formules de Maxwell avec les formules que nous venons d'écrire. Dans ces dernières, remplaçons

La densité superficielle  $\Sigma$  par la densité superficielle  $E$ ,

L'expression  $\frac{\varepsilon V}{1 + 4\pi\varepsilon F_0}$  par la fonction  $\Psi$ ,

Le coefficient  $\frac{(1 + 4\pi\varepsilon F_0)^2}{\varepsilon}$  par le coefficient  $k_0$ ,

Le coefficient  $\frac{(1 + 4\pi\varepsilon F_0)(1 + 4\pi\varepsilon F_2)}{\varepsilon}$  par le coefficient  $k_2$ ,

Partant, le rapport  $\frac{1 + 4\pi\varepsilon F_2}{1 + 4\pi\varepsilon F_0}$  par le rapport  $\frac{k_2}{k_0}$ ,

Enfin les expressions par les expressions

$$\frac{1 + 4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon F} A, \quad f,$$

$$\frac{1 + 4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon F} B, \quad g,$$

$$\frac{1 + 4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon F} C, \quad h,$$

et nos formules deviennent identiques à celles de Maxwell.

On remarquera que  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , deviendraient infinis dans un milieu où  $F$  serait égal à 0.

L'accord est donc complet entre l'Électrostatique de Maxwell et les formules par lesquelles nous avons traduit la théorie classique de la polarisation; mais ces dernières traduisent seulement, en réalité, une théorie très particulière que l'on peut regarder comme un cas spécial d'une théorie beaucoup plus générale.

En effet, 1° : Au lieu de supposer que, dans les équations (14),  $F_2$  représente une constante, on peut, comme nous l'avons indiqué tout à l'heure, supposer que cette lettre représente une fonction de l'intensité  $\mathcal{A}$  de polarisation. Depuis longtemps, Kirchhoff a montré que le phénomène de la *saturation* exigeait une semblable généralisation des

équations de l'aimantation par influence et la substitution de la *fonction magnétisante* au coefficient d'aimantation de Poisson est, aujourd'hui, généralement adoptée. Il paraît difficile que l'étude des diélectriques placés dans des champs électriques intenses n'oblige pas à modifier d'une manière analogue les équations de la polarisation.

2° On peut supposer que les équations (14) ne sont vraies que pour les corps diélectriques *parfaitement doux* en équilibre, de même que, dans l'étude de l'aimantation par influence, les équations analogues aux équations (14) ne sont vraies que pour les corps magnétiques *parfaitement doux*. Mais, parmi les diélectriques aussi bien que parmi les aimants, les corps parfaitement doux ne sont pas les seuls qu'il y ait lieu de considérer; ou plutôt, dans un cas comme dans l'autre, on peut dire que le corps parfaitement doux n'existe pas; la conception de corps parfaitement doux est une notion limite, que certains corps réalisent à peu près, tandis que d'autres ne sauraient trouver en elle une figure, même approchée, de leurs propriétés. Les phénomènes de polarisation diélectrique rémanente, si souvent étudiés, d'Épinus à M. Pellat, offrent avec les phénomènes d'aimantation rémanente une telle analogie, qu'on ne saurait éviter la supposition d'une *hystérésis diélectrique*.

Or, la théorie électrostatique de Maxwell ne paraît pas capable de se prêter à ces diverses généralisations qui se relient, au contraire, d'une manière très naturelle à la doctrine classique.

**2° NOTE. — De l'influence que l'aimantation du milieu  
exerce sur les actions magnétiques.**

Les idées anciennes d'Edmond Becquerel sur l'explication du diamagnétisme, les idées plus récentes de Maxwell sur la propagation des actions diélectriques, ont conduit à regarder tous les milieux, même le vide ou éther, comme susceptibles de polarisation diélectrique et de polarisation magnétique. De là le problème suivant : Si l'on sait calculer les actions qu'exerceraient, selon les lois classiques de l'électricité et du magnétisme, des corps plongés dans un milieu impola-

risable, peut-on, par des règles simples, en tirer la valeur des actions qui s'exercent au sein d'un milieu capable de polarisation?

Si l'on suppose le milieu capable de polarisation diélectrique, mais incapable de polarisation magnétique; si l'on suppose, en outre, que le milieu est parfaitement doux et que la valeur du coefficient de polarisation ne dépend pas de l'intensité de la polarisation, le problème est susceptible d'une solution très complète et très simple. Cette solution a été développée, pour la première fois croyons-nous, dans nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* (Livre XI, Chap. III; t. II, p. 370).

Il serait fort intéressant de découvrir une règle analogue, permettant de ramener le calcul des actions magnétiques qui s'exercent au sein d'un milieu capable d'aimantation aux actions qui s'exercent au sein d'un milieu non magnétique. Divers auteurs ont tenté d'énoncer de telles règles; nous avons commencé la critique de ces règles dans nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* (Livre IX, Chap. VII, § 2, t. II, p. 230); nous l'avons poursuivie dans les *Leçons sur la propagation des actions électriques, magnétiques et diélectriques* que nous avons données à la Faculté des Sciences de Bordeaux en 1899-1900, et qui sont encore inédites; nous sommes arrivés à cette conclusion qu'aucune de ces règles ne pouvait être regardée comme exacte.

Nous nous proposons de reprendre et de développer ici cette discussion.

Supposons qu'au sein d'un milieu 0, dont  $f_0$  est le coefficient d'aimantation, se trouvent un ou plusieurs aimants permanents, que nous désignerons par l'indice 1, et une ou plusieurs masses parfaitement douces, que nous désignerons par l'indice 2 et dont le coefficient d'aimantation sera représenté par  $f_2$ . Pour simplifier, nous admettrons d'emblée que les coefficients d'aimantation  $f_0$ ,  $f_2$  sont indépendants de l'intensité d'aimantation.

En un point quelconque, nous désignerons par  $\mathcal{V}$  la fonction potentielle magnétique; nous représenterons par  $\mathcal{A}$  l'intensité d'aimantation et par  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  ses composantes; nous affecterons ces lettres de l'un des indices 0, 1, 2, selon que le point considéré se trouvera au sein de l'un des milieux 0, 1, 2.

Nous aurons, en tout point du milieu 0,

$$(1) \quad \mathcal{A}_0 = -f_0 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \quad \mathcal{B}_0 = -f_0 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \quad \mathcal{C}_0 = -f_0 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$$

et, en tout point du milieu 2,

$$(2) \quad \mathcal{A}_2 = -f_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \quad \mathcal{B}_2 = -f_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \quad \mathcal{C}_2 = -f_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}.$$

En tout point du milieu 1,  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{C}_1$  ont des valeurs données.

Nous voyons alors que la fonction  $\mathcal{U}$ , qui vérifie l'équation de Laplace en chacun des points des milieux 0 et 2, vérifie, en chaque point du milieu 1, la relation

$$(3) \quad \Delta \mathcal{U} = 4\pi \left( \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial z} \right),$$

dont le second membre a une valeur donnée.

A la surface de séparation  $S_{20}$  des corps 0 et 2, on a

$$(4) \quad (1 + 4\pi f_0) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial N_0} + (1 + 4\pi f_2) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial N_2} = 0,$$

tandis qu'à la surface de séparation  $S_{10}$  des corps 0 et 1, on a la relation

$$(5) \quad (1 + 4\pi f_0) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial N_0} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial N_1} = 4\pi \left[ \mathcal{A}_1 \cos(N_1, x) + \mathcal{B}_1 \cos(N_1, y) + \mathcal{C}_1 \cos(N_1, z) \right],$$

dont le second membre a une valeur donnée.

Au problème précédent, substituons celui-ci :

Le milieu 0 n'est pas magnétique; l'aimant 1 a la même aimantation que dans le cas précédent; le corps 2 a un coefficient d'aimantation  $K_2$  donné par la relation

$$(6) \quad 1 + 4\pi K_2 = \frac{1 + 4\pi f_2}{1 + 4\pi f_0}.$$

Soit  $\mathcal{U}$  la fonction potentielle magnétique dans ce nouveau problème.

Cette fonction, vérifiant l'équation de Laplace au sein des milieux 0 et 2, vérifie, en tout point du milieu 1, l'équation

$$(3^{bis}) \quad \Delta \mathcal{U} = 4\pi \left( \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial z} \right);$$

à la surface  $S_{20}$ , elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial N_0} + (1 + 4\pi K_2) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial N_2} = 0.$$

que la relation (6) permet d'écrire

$$(4^{bis}) \quad (1 + 4\pi f_0) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial N_0} + (1 + 4\pi f_2) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial N_2} = 0;$$

enfin, à la surface  $S_{10}$ , elle vérifie l'équation

$$(7) \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial N_0} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial N_1} = 4\pi \left[ \mathcal{A}_1 \cos(N_1, x) + \mathcal{B}_1 \cos(N_1, y) + \mathcal{C}_1 \cos(N_1, z) \right].$$

Maxwell<sup>(1)</sup> et Émile Mathieu<sup>(2)</sup> ont énoncé que la fonction  $\mathcal{U}$  ainsi déterminée était identique à la fonction  $\mathcal{V}$ . Ce théorème ne peut être exact; les conditions vérifiées par la fonction  $\mathcal{V}$  et les conditions vérifiées par la fonction  $\mathcal{U}$  sont toutes identiques, *sauf une*, celle qui a trait à la surface  $S_{10}$ ; celle-ci est représentée, dans un cas, par l'égalité (5) et, dans l'autre cas, par l'égalité (7).

Maxwell, par deux voies également scabreuses<sup>(3)</sup>, a étudié les actions qui s'exercent entre des aimants plongés dans un milieu susceptible d'aimantation; il a trouvé la loi suivante :

Ces deux aimants exercent l'un sur l'autre les mêmes actions que si deux masses magnétiques se repoussaient avec la force

$$(8) \quad F = \frac{1}{\mu} \frac{mm'}{r^2},$$

$r$  étant la distance des deux masses  $m$ ,  $m'$ , et  $\mu$  la perméabilité magnétique du milieu rapportée à l'éther.

Les masses en question sont mesurées, comme on le voit, avec une unité telle que, placées à l'unité de distance, dans l'éther, elles se repousseraient avec la force  $mm'$ .

Soient :  $\varphi$  le coefficient d'aimantation de l'éther;

$f_0$  le coefficient d'aimantation du milieu;

$M$ ,  $M'$  les valeurs de nos masses magnétiques, mesurées avec une unité telle que, placées à l'unité de distance, dans l'espace impolarisable, elles se repoussent avec une force  $MM'$ .

(<sup>1</sup>) MAXWELL, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, p. 59 de la traduction française.

(<sup>2</sup>) É. MATHIEU, *Théorie du Potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme*; 2<sup>e</sup> Partie : *Électrostatique et Magnétisme*, p. 163; Paris, 1886.

(<sup>3</sup>) MAXWELL, *On physical Lines of Force (Scientific Papers*, vol. I, p. 464); — *A dynamical Theory of the electromagnetic Field (Scientific Papers*, vol. I, p. 566).

Nous aurons

$$\mu = \frac{1 + 4\pi f_0}{1 + 4\pi \varphi}$$

Pour un milieu impolarisable,  $f_0 = 0$ ,  $\mu = \frac{1}{1 + 4\pi \varphi}$ ; la formule (8) nous donnera donc

$$MM' = (1 + 4\pi \varphi) mm'.$$

Moyennant ces deux égalités, l'égalité (8) peut s'écrire

$$F = \frac{1}{1 + 4\pi f_0} \frac{MM'}{r^2}$$

Elle conduit à l'énoncé suivant :

*Les actions qui s'exercent entre deux aimants permanents placés dans un milieu magnétique peuvent se calculer en calculant d'abord les actions mutuelles des deux aimants au sein d'un milieu incapable de s'aimanter et EN DIVISANT ensuite par  $(1 + 4\pi f_0)$  les résultats obtenus.*

M. L. Boltzmann<sup>(1)</sup> a énoncé la même loi.

Helmholtz, au contraire, admet la proposition suivante<sup>(2)</sup> :

*Si l'on veut calculer les actions mutuelles qui s'exercent dans un système d'aimants et de courants plongés dans un milieu magnétique, il suffit de calculer les actions qui s'exerceraient au sein d'un milieu impolarisable et DE MULTIPLIER par  $(1 + 4\pi f_0)$  les résultats obtenus.*

Ni la loi énoncée par Maxwell, ni la loi énoncée par Helmholtz ne peuvent être considérées comme exactes. Nous allons prouver qu'elles demeurent inexactes même si l'on regarde  $f_0$  comme assez petit pour que l'on puisse négliger les termes de l'ordre du carré de cette quantité.

Soient :  $O$ , le milieu magnétique;  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$ , les composantes de l'aimantation en un point de ce milieu ;

$$(9) \quad \mathcal{V}_0 = \int_0 \left( A_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + B_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + C_0 \frac{\partial}{\partial z_0} \right) \frac{1}{r} d\tau_0$$

la fonction potentielle magnétique de cette aimantation.

(<sup>1</sup>) L. BOLTZMANN, *Vorlesungen über die Maxwell's Theorie der Elektrizität und des Lichtes*, II<sup>e</sup> Theil, p. 94 et p. 98.

(<sup>2</sup>) H. VON HELMHOLTZ, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Electrodynamik für ruhende, leitende Körper* (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. LXXII, p. 128; 1870. — *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. I, p. 627)

Soient : 1 les aimants permanents;  $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1$  les composantes de l'aimantation en un point de ces aimants;

$$(10) \quad \mathcal{V}_0 = \int_1 \left( \mathcal{A}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \mathcal{B}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \mathcal{C}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d\tau_1$$

la fonction potentielle de ces aimants permanents.

En tout point du milieu 0, les composantes de l'aimantation sont données par les égalités

$$(11) \quad \begin{cases} \mathcal{A}_0 = -f_0 \frac{\partial (\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1)}{\partial x}, \\ \mathcal{B}_0 = -f_0 \frac{\partial (\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1)}{\partial y}, \\ \mathcal{C}_0 = -f_0 \frac{\partial (\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1)}{\partial z}. \end{cases}$$

Considérons un déplacement virtuel où chaque élément matériel appartenant à un aimant permanent entraîne, inaltérée, son aimantation; où, en chaque point du milieu 0, l'aimantation continue à être donnée par les égalités (11); dans cette modification, les forces extérieures capables de maintenir le système en équilibre effectuent un travail virtuel  $d\mathcal{C}_e$  et l'on a

$$(12) \quad d\mathcal{C}_e = \delta \mathcal{F}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{1}{2} \int_{0+1} \left[ \mathcal{A} \frac{\partial (\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1)}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial (\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1)}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial (\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1)}{\partial z} \right] d\tau \\ & + \int_0 \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}_0^2}{2f_0} d\tau_0. \end{aligned}$$

Une transformation bien connue permet d'écrire l'expression de  $\mathcal{F}$  de la manière suivante :

$$(13) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int_{0+1} \left\{ \left[ \frac{\partial (\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1)}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial (\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1)}{\partial y} \right]^2 + \left[ \frac{\partial (\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1)}{\partial z} \right]^2 \right\} d\tau \\ + \int_0 \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}_0^2}{2f_0} d\tau_0.$$

Cette formule est générale. Simplifions-la maintenant en supposant que  $f_0$  soit très petit et en négligeant les termes qui sont de l'ordre du carré de cette quantité.

L'égalité (9) montre que  $\mathcal{V}_0$  est de l'ordre de grandeur de  $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ , tandis que les égalités (11) montrent que ces dernières quantités sont de l'ordre de  $f_0$ . On voit alors sans peine que les égalités (11) peuvent être réduites à

$$(14) \quad \mathcal{A}_0 = -f_0 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x}, \quad \mathcal{B}_0 = -f_0 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y}, \quad \mathcal{C}_0 = -f_0 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z}.$$

Au même degré d'approximation, l'égalité (13) peut s'écrire

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{1}{8\pi} \int_{0+1} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{0-1} \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial z} \right) d\tau \\ & + \int_0 \frac{\mathcal{M}_0^2}{2f_0} d\tau_0. \end{aligned}$$

Nous avons, d'ailleurs,

$$(16) \quad \begin{aligned} & \int_{0+1} \left( \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right) d\tau \\ & = - \int_{0+1} \mathcal{V}_1 \Delta \mathcal{V}_0 d\tau - \int \mathcal{V}_1 \left( \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial N_0} + \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial N_1} \right) dS_{10}. \end{aligned}$$

$\Delta \mathcal{V}_0$  est nul aussi bien dans la région 0 que dans la région 1; en outre, en tout point de la surface  $S_{10}$ , on a

$$\frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial N_0} + \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial N_1} = 4\pi \left[ \mathcal{A}_0 \cos(N_0, x) + \mathcal{B}_0 \cos(N_0, y) + \mathcal{C}_0 \cos(N_0, z) \right]$$

ou bien, en vertu des égalités (14),

$$\frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial N_0} + \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial N_1} = -4\pi f_0 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial N_0}.$$

Enfin, comme  $\Delta \mathcal{V}_1$  est nul dans tout le milieu 0 et que  $\mathcal{V}_1$  s'annule à l'infini,

$$\int \mathcal{V}_1 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial N_0} dS_{10} = - \int \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_0.$$

L'égalité (16) peut donc s'écrire

$$(17) \quad \begin{aligned} & \int_{0+1} \left( \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right) d\tau \\ & = -4\pi f_0 \int_1 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_0. \end{aligned}$$



En vertu des égalités (14) et (17), l'égalité (15) devient

$$(18) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int_1 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_1 \\ + \frac{1 - 4\pi f_0}{8\pi} \int_0 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_0.$$

La règle énoncée par Maxwell peut-elle être exacte? Au lieu de l'égalité (18), cette règle nous donnerait

$$(19) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{8\pi(1 + 4\pi f_0)} \int_0 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_1 \\ + \frac{1}{8\pi(1 + 4\pi f_0)} \int_0 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_0.$$

Au degré d'approximation indiqué ici, on a

$$1 - 4\pi f_0 = \frac{1}{1 + 4\pi f_0}.$$

Les seconds membres des égalités (18) et (19) peuvent donc être regardés comme ayant même second terme. Pour que la formule de Maxwell fût exacte, il serait nécessaire et suffisant que les premiers termes eussent même variation virtuelle ou que

$$(20) \quad \delta \int_1 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_1 = 0$$

en tout déplacement des aimants permanents.

Il est clair qu'il n'en peut être ainsi en général.

Prenons l'exemple que voici :

Le milieu renferme deux aimants permanents,  $a$  et  $b$ , et l'un d'eux,  $b$ , ne porte aucune aimantation. Soit  $J_a(x, y, z)$  l'intensité du champ créé, au point  $(x, y, z)$ , par l'aimant  $a$ ; nous aurons visiblement

$$\int_1 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_1 \\ = \int_a J_a^2 d\tau_a + \int_b J_a^2 d\tau_b.$$

Lorsqu'on déplace les deux aimants  $a$  et  $b$  l'un par rapport à l'autre,  $\int_a J_a^2 d\tau_a$  garde une valeur invariable; mais il n'en saurait être de même de la quantité  $\int_b J_a^2 d\tau_b$ ; cette quantité, nulle si les deux

aimants  $a$  et  $b$  sont infiniment éloignés l'un de l'autre,  $a$  a une valeur positive finie lorsqu'ils sont à distance finie.

La règle de Helmholtz peut-elle être exacte?

Elle conduirait à prendre, au lieu de l'expression (18), l'expression

$$(21) \quad \mathcal{F} = \frac{1 + 4\pi f_0}{8\pi} \int_1 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_1 \\ + \frac{1 + 4\pi f_0}{8\pi} \int_0 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_0.$$

Pour qu'elle fût acceptable, il faudrait que l'on eût, en toute modification virtuelle,

$$(22) \quad \delta \int_1 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_1 \\ - \delta \int_0 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_0 = 0.$$

Or, il est aisé de concevoir des systèmes pour lesquels cette égalité (22) ne saurait avoir lieu.

Reprenons nos deux aimants permanents  $a$  et  $b$ , dont l'un,  $b$ , ne porte aucune aimantation. Il est clair qu'en tout déplacement du système, la somme  $\int J_a^2 d\tau$ , étendue à l'espace entier, demeure invariable, et qu'il en est de même de la somme  $\int_a J_a^2 d\tau$ ; on a donc, d'une part,

$$(23) \quad \delta \int_1 J_a^2 d\tau_1 = \delta \int_b J_a^2 d\tau_b,$$

et, d'autre part,

$$\delta \int_b J_a^2 d\tau_b + \delta \int_0 J_a^2 d\tau_0 = 0,$$

ce qui donne

$$\delta \int_1 J_a^2 d\tau_1 = - \delta \int_0 J_a^2 d\tau_0.$$

D'autre part, l'égalité (22) peut s'écrire

$$\delta \int J_a^2 d\tau_1 = \delta \int_a J_a^2 d\tau_0.$$

Ces deux égalités ne sont compatibles que si l'on a

$$\varepsilon \int_1 \mathbf{J}_a^2 d\tau_1 = 0,$$

ou bien, en vertu de l'égalité (23),

$$\varepsilon \int \mathbf{J}_a^2 d\tau_0 = 0.$$

Nous retrouvons ainsi, en admettant la validité de la règle de Helmholtz, la conséquence inadmissible que nous avons trouvée en admettant la validité de la règle de Maxwell. Ces deux règles doivent être rejetées.

**3<sup>e</sup> NOTE. — Sur une différence essentielle entre la théorie de l'équilibre électrique et la théorie du magnétisme, et sur la théorie de l'électrostatique et du magnétisme donnée par Hertz.**

I. — Considérons, comme en la première Note, un système où des corps électrisés et des diélectriques sont plongés dans un milieu diélectrique; gardons d'ailleurs les notations de la première Note.

En vertu des égalités (14) et (13) de cette Note, le potentiel interne a pour valeur

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathcal{F} = & \frac{\varepsilon}{2} \int_1 V d\tau_1 + \frac{\varepsilon}{2} \int_1 V \Sigma dS_{10} \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \int_0 \left( \mathcal{A}_0 \frac{\partial V}{\partial x_0} + \mathcal{B}_0 \frac{\partial V}{\partial y_0} + \mathcal{C}_0 \frac{\partial V}{\partial z_0} \right) d\tau_0 + \int_0 \frac{\mathcal{A}_0^2}{2F_0} d\tau_0 \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \int_0 \left( \mathcal{A}_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial V}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial V}{\partial z_2} \right) d\tau_2 + \int_2 \frac{\mathcal{A}_2^2}{2F_2} d\tau_2. \end{aligned}$$

En tout point du milieu 1, on a

$$(2) \quad \Delta V = 4\pi\sigma;$$

en tout point du milieu 0, on a

$$(3) \quad \Delta V = 4\pi \left( \frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial x_0} + \frac{\partial \mathcal{B}_0}{\partial y_0} + \frac{\partial \mathcal{C}_0}{\partial z_0} \right);$$

en tout point du milieu 2, on a

$$(4) \quad \Delta V = 4\pi \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial y_2} + \frac{\partial C_2}{\partial z_2} \right);$$

en tout point de la surface  $S_{10}$ , on a

$$(5) \quad \frac{\partial V}{\partial N_0} + \frac{\partial V}{\partial N_1} = -4\Sigma + 4\pi \left[ A_0 \cos(N_0, x) + B_0 \cos(N_0, y) + C_0 \cos(N_0, z) \right];$$

Enfin, en tout point de la surface  $S_{20}$ , on a

$$(6) \quad \frac{\partial V}{\partial N_0} + \frac{\partial V}{\partial N_2} = 4\pi \left[ A_0 \cos(N_0, x) + B_0 \cos(N_0, y) + C_0 \cos(N_0, z) + A_2 \cos(N_2, x) + B_2 \cos(N_2, y) + C_2 \cos(N_2, z) \right].$$

Moyennant l'ensemble de ces égalités, l'égalité (4) prend la forme bien connue

$$(7) \quad \bar{\mathcal{H}} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int_{0+1+2} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau + \int_0 \frac{A_0^2}{2F_0} d\tau_0 + \int_2 \frac{A_2^2}{2F_2} d\tau_2.$$

Cette égalité est susceptible de deux nouvelles transformations.

La première suppose vérifiées, en tout point des milieux 0 et 2, les équations de l'équilibre de polarisation :

$$(8) \quad \begin{cases} A_0 = -\varepsilon F_0 \frac{\partial V}{\partial x_0}, & A_2 = -\varepsilon F_2 \frac{\partial V}{\partial x_2}, \\ B_0 = -\varepsilon F_0 \frac{\partial V}{\partial y_0}, & B_2 = -\varepsilon F_2 \frac{\partial V}{\partial y_2}, \\ C_0 = -\varepsilon F_0 \frac{\partial V}{\partial z_0}, & C_2 = -\varepsilon F_2 \frac{\partial V}{\partial z_2}. \end{cases}$$

Elle remplace l'égalité (7) par l'égalité

$$(9) \quad \bar{\mathcal{H}} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int_1 \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_1 + \frac{\varepsilon}{8\pi} \int_0 (1 + 4\pi\varepsilon F_0) \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_0 + \frac{\varepsilon}{8\pi} \int_2 (1 + 4\pi\varepsilon F_2) \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_2.$$

La seconde suppose, en outre, que les corps électrisés sont des corps conducteurs sur lesquels l'équilibre électrique est établi; on a alors, en tout point de la région 1,

$$(10) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Dès lors, quelle que soit la valeur que l'on veuille attribuer à  $F$  aux divers points de la région (1), l'égalité (7) peut s'écrire

$$(11) \quad \mathcal{F} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int (1 + 4\pi\varepsilon F) \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

l'intégration s'étendant à tout l'espace.

Entre la théorie de la polarisation diélectrique et la théorie de l'aimantation, l'analogie est si grande que l'on est tenté d'étendre les résultats précédents au cas où des aimants permanents 1 et des corps parfaitement doux 2 sont plongés dans un milieu magnétique. Il suffirait de remplacer

les composantes $\mathcal{A}$ , $\mathcal{B}$ , $\mathcal{C}$ de la polarisation	par les composantes $\mathcal{A}$ , $\mathcal{B}$ , $\mathcal{C}$ , de l'aimantation;
la fonction potentielle électrostatique $V$	par la fonction potentielle magnétique $\mathcal{V}$ ;
le coefficient de polarisation $F$	par le coefficient d'aimantation $f$ ;
la constante $\varepsilon$	par 1.

Cette extension, cependant, ne doit pas se faire sans quelque précaution.

On peut toujours l'appliquer à l'égalité (7); elle donne alors une formule dont l'égalité employée en la Note précédente, sous le n° 13, est un cas particulier; on peut également l'appliquer à l'égalité (9), qui devient

$$(12) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int_1 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_1 \\ + \frac{1}{8\pi} \int_0 (1 + 4\pi f_0) \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_0 \\ + \frac{1}{8\pi} \int_2 (1 + 4\pi f_2) \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau_2.$$

Mais, pour passer de l'égalité (9) à l'égalité (11), nous avons dû faire usage des propriétés particulières des conducteurs électrisés,

propriétés qu'expriment les relations (10); ce passage n'est donc plus légitime ici, où les conducteurs électrisés sont remplacés par des aimants permanents, pour lesquels les relations (10) ne sont plus vérifiées; dès lors, si nous voulons écrire l'égalité

$$(13) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int (1 + 4\pi f) \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

où l'intégration s'étend à tout l'espace, nous devons remplacer  $f$  par 0 au sein des aimants permanents.

Ces remarques sont essentielles, car les physiciens font un fréquent usage de la formule (13); elle avait été tout d'abord donnée par Maxwell<sup>(1)</sup> qui, au cours de ses nombreuses variations sur la théorie du magnétisme, semble l'avoir ensuite abandonnée<sup>(2)</sup>; une formule analogue a été adoptée par Heaviside, par Hertz, par Cohn, et par les nombreux électriciens qui ont suivi leur sentiment; toutefois les idées de ces derniers physiciens diffèrent trop des théories développées ici, pour que nous puissions sans discussion identifier la formule qu'ils emploient avec notre égalité (13).

Nous sommes amenés par là à comparer la théorie du magnétisme donnée par ces auteurs, et particulièrement par Hertz, avec la théorie développée par Helmholtz et par nous-même.

II. — Dans les divers écrits que nous avons consacrés à l'étude du magnétisme nous avons toujours, avec Gauss, fait choix d'un système particulier d'unités; nous avons admis qu'en vertu de ce choix, deux pôles magnétiques  $m, m'$ , séparés l'un de l'autre par une distance  $r$  et placés dans un milieu incapable d'aimantation, se repoussaient avec une force

$$F = \frac{mm'}{r^2}.$$

Pour donner sa pleine clarté à la discussion qui va suivre, il importe de laisser entièrement arbitraire l'unité de quantité de magnétisme; partant, de remplacer la formule précédente par la formule

$$(14) \quad F = \varepsilon' \frac{mm'}{r^2}$$

<sup>(1)</sup> MAXWELL, *On physical Lines of Force* (Scientific Papers, vol. I, p. 472); — *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* (Scientific Papers, vol. I, p. 562).

<sup>(2)</sup> MAXWELL, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, nos 634 à 636; t. II, p. 305, de la traduction française.

où  $\varepsilon'$  est un coefficient positif dont la valeur dépendra du choix de l'unité de charge magnétique.

Désignons par  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  les trois composantes de l'aimantation en un point d'un milieu magnétique. Si ce milieu est un aimant permanent 1, il n'est pas nécessaire, pour en connaître les effets, de connaître en chaque point de cet aimant les valeurs des trois composantes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ; il suffit de connaître, en chaque point intérieur à l'aimant, la valeur de la densité solide fictive

$$(15) \quad \sigma_1 = - \left( \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial z_1} \right)$$

et, en chaque point de la surface, où  $N_1$  est la normale vers l'intérieur de l'aimant permanent, la valeur de la densité superficielle fictive

$$(16) \quad \Sigma_1 = - \left[ \mathcal{A}_1 \cos(N_1, x) + \mathcal{B}_1 \cos(N_1, y) + \mathcal{C}_1 \cos(N_1, z) \right]$$

Si l'on désigne par  $\mathcal{V}$  la fonction potentielle magnétique, donnée par la formule

$$(17) \quad \mathcal{V} = \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial}{\partial z} \right) d\tau,$$

où l'intégration s'étend à tout l'espace, le potentiel interne formé d'un aimant permanent 1 et d'un corps parfaitement doux 2, homogène ou de constitution constamment variable, plongés dans un milieu homogène et parfaitement doux 0, est donné par la formule

$$(18) \quad \mathcal{F} = \frac{\varepsilon'}{2} \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right) d\tau \\ + \int_0 \frac{\mathcal{A} \mathcal{B}_0^2}{2f_0} d\tau_0 + \int_2 \frac{\mathcal{A} \mathcal{B}_2^2}{2f_2} d\tau_2.$$

$f_0, f_2$  sont les coefficients d'aimantation des milieux 0 et 2 et les deux dernières intégrales s'étendent respectivement à ces deux milieux.

En ces deux milieux, on a

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}_0 = -\varepsilon' f_0 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_0}, & \mathcal{A}_2 = -\varepsilon' f_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2}, \\ \mathcal{B}_0 = -\varepsilon' f_0 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_0}, & \mathcal{B}_2 = -\varepsilon' f_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_2}, \\ \mathcal{C}_0 = -\varepsilon' f_0 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_0}, & \mathcal{C}_2 = -\varepsilon' f_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_2} \end{array} \right.$$

Ces égalités permettent de donner à  $\mathcal{F}$  les deux formes équivalentes :

$$(20) \quad \mathcal{F} = \frac{\epsilon'}{2} \int_1 \mathcal{V} \sigma_1 d\omega_1 + \frac{\epsilon'}{2} \int \mathcal{V} \Sigma_1 dS_{10},$$

$$(21) \quad \begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{\epsilon'}{8\pi} \int_1 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega_1 \\ & + \frac{\epsilon'}{8\pi} \int_0 (1 + 4\pi\epsilon' f_0) \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega_0 \\ & + \frac{\epsilon'}{8\pi} \int_2 (1 + 4\pi\epsilon' f_2) \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega_2. \end{aligned}$$

La détermination de la fonction  $\mathcal{V}$  fixera toutes les propriétés physiques et mécaniques du système. Cette détermination résulte, sans ambiguïté, des conditions suivantes :

En tout point de l'aimant permanent 1, on a

$$(22) \quad \Delta \mathcal{V} = -4\pi\sigma_1;$$

En tout point du milieu 0, on a

$$(23) \quad \Delta \mathcal{V} = 0;$$

En tout point du corps 2, on a

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( 1 + 4\pi\epsilon' f_2 \right) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 + 4\pi\epsilon' f_2 \right) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( 1 + 4\pi\epsilon' f_2 \right) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right] = 0. \end{aligned}$$

En tout point de la surface  $S_{10}$ , on a

$$(25) \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_1} + \left( 1 + 4\pi\epsilon' f_0 \right) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_0} = -4\pi\Sigma_1;$$

En tout point de la surface  $S_{12}$ , on a

$$(26) \quad \left( 1 + 4\pi\epsilon' f_0 \right) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_0} + \left( 1 + 4\pi\epsilon' f_2 \right) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_2} = 0.$$

Les formules que nous venons d'écrire sont les formules fondamentales de la théorie développée par Helmholtz et par nous-même.



Posons

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon' \mathcal{V} = \Psi, \\ \frac{\varepsilon' \sigma_1}{1 + 4\pi \varepsilon' f_0} = w_1, \\ \frac{\varepsilon' \Sigma_1}{1 + 4\pi \varepsilon' f_0} = W_1, \\ \frac{1 + 4\pi \varepsilon' f_2}{1 + 4\pi \varepsilon' f_0} = \mu_2, \\ \frac{1}{1 + 4\pi \varepsilon' f_0} = \mu_r, \\ \frac{1 + 4\pi \varepsilon' f_0}{\varepsilon'} = \frac{1}{\varepsilon' \mu_r} = \gamma_1'. \end{array} \right.$$

Les formules précédentes deviendront

$$(22^{bis}) \quad \Delta \mu_r \Psi = -4\pi w_1,$$

$$(23^{bis}) \quad \Delta \Psi = 0,$$

$$(24^{bis}) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = 0,$$

$$(25^{bis}) \quad \mu_r \frac{\partial \Psi}{\partial N_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial N_0} = -4\pi W_1,$$

$$(26^{bis}) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial N_0} + \mu_2 \frac{\partial \Psi}{\partial N_2} = 0,$$

$$(20^{bis}) \quad \mathcal{F} = \frac{\gamma_1'}{2} \int_1 \Psi w_1 d\sigma_1 + \frac{\gamma_1'}{2} \int \Psi W_1 dS_{10},$$

$$(21^{bis}) \quad \begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{\gamma_1'}{8\pi} \int_1 \mu_r \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right] d\sigma_1 \\ & + \frac{\gamma_1'}{8\pi} \int_0 \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right] d\sigma_0 \\ & + \frac{\gamma_1'}{8\pi} \int_2 \mu_2 \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right] d\sigma_2. \end{aligned}$$

Les égalités que nous obtenons de la sorte, équivalentes, aux notations près, aux égalités fondamentales de la théorie développée par Helmholtz et par nous-même, offrent maintenant la plus grande analogie avec les équations de l'équilibre magnétique telles qu'elles

ont été données par Hertz (1). L'analogie deviendra encore plus complète par un choix judicieux de l'unité de charge magnétique.

On peut, en effet, choisir cette unité de telle sorte que  $\epsilon$  prenne une valeur positive quelconque; si donc on suppose le milieu 0 assez peu magnétique pour que  $f_0$  soit inférieur à  $\frac{1}{4\pi}$ , on pourra faire que

$$(28) \quad \epsilon' = \frac{1}{1 - 4\pi f_0},$$

cas auquel on aura

$$(29) \quad \eta' = 1$$

et aussi

$$(30) \quad \mu_p = \frac{1}{1 + 4\pi f_0 - 16\pi^2 f_0^2}$$

Dès lors, nommons *perméabilité magnétique* du corps étudié et désignons par la lettre  $\mu$  une grandeur qui aura la valeur 1 dans le milieu 0 : la valeur invariable  $\mu_p$ , inférieure à 1, donnée par l'égalité (30), au sein de tout aimant permanent; la valeur  $\mu_s$ , dépendant de la nature de la substance au point considéré, en chaque point d'un corps parfaitement doux. L'égalité (24 bis) pourra s'écrire

$$(31) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int \mu \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

l'intégration s'étendant à tout l'espace.

Posons ensuite

$$(32) \quad \mathfrak{F} = -\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \mathfrak{M} = -\mu \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \mathfrak{N} = -\mu \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Considérons un fluide fictif dont la densité solide  $w$  en un point d'un volume continu soit donnée par la formule

$$(33) \quad w = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} \right)$$

(1) H. HERTZ, Ueber die Grundgleichungen des Elektrodynamik für ruhende Körper (Göttinger Nachrichten, 19 mars 1900. — Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie, Bd XL, p. 577. — Gesammelte Werke von H. Hertz; Bd II : Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft; zweite Auflage, p. 208).

et dont la densité superficielle  $W$  en un point de la surface qui sépare deux corps  $a$  et  $b$  soit donnée par la formule

$$(34) \quad W = \frac{1}{4\pi} \left[ \mathfrak{L}_a \cos(N_a, x) + \mathfrak{M}_a \cos(N_a, y) + \mathfrak{N}_a \cos(N_a, z) \right. \\ \left. + \mathfrak{L}_b \cos(N_b, x) + \mathfrak{M}_b \cos(N_b, y) + \mathfrak{N}_b \cos(N_b, z) \right];$$

à ce fluide fictif, donnons le nom de *fluide magnétique vrai*; les conditions (22 bis) à (26 bis) pourront alors s'énoncer de la manière suivante:

*La densité solide du fluide magnétique vrai a une valeur donnée en chaque point à l'intérieur d'un aimant permanent; la densité superficielle du même fluide a une valeur donnée en tout point de la surface qui limite un aimant permanent; partout ailleurs, ces deux densités sont nulles.*

Hertz (1) donne aux quantités  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  le nom de *composantes de la polarisation magnétique*; il indique toutefois (2) que ce ne sont peut-être pas les composantes de la polarisation au sens ancien du mot. Il est facile de voir, en effet, que ces grandeurs diffèrent extrêmement des composantes  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  de l'intensité d'aimantation.

Au sein d'un milieu parfaitement doux quelconque 2, la comparaison des égalités (19), (32) et (27) donne

$$(35) \quad \begin{cases} \mathfrak{L} = \frac{1}{f_0} \frac{1 + 4\pi\varepsilon' f_2}{1 + 4\pi\varepsilon' f_0} \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{M} = \frac{1}{f_0} \frac{1 + 4\pi\varepsilon' f_2}{1 + 4\pi\varepsilon' f_0} \mathfrak{B}, \\ \mathfrak{N} = \frac{1}{f_0} \frac{1 + 4\pi\varepsilon' f_2}{1 + 4\pi\varepsilon' f_0} \mathfrak{C}. \end{cases}$$

Au sein d'un aimant permanent, les égalités (32) et (27) donnent

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = - \frac{1}{1 + 4\pi\varepsilon' f_0} \Delta \mathfrak{V} = - \frac{\varepsilon'}{1 + 4\pi\varepsilon' f_0} \Delta \mathfrak{V}$$

et comme

$$\Delta \mathfrak{V} = 4\pi \left( \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z} \right),$$

(1) H. HERTZ, *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft*; 2<sup>e</sup> Auflage, p. 224.

(2) H. HERTZ, *loc. cit.*, p. 228 (en note).

on voit que l'on a

$$(36) \quad \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = - \frac{4\pi\epsilon'}{1 + 4\pi\epsilon'f_0} \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right),$$

en sorte que  $\mathfrak{I}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  diffèrent encore extrêmement de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ .

A côté du fluide fictif qu'il nomme *magnétisme vrai*, Hertz considère (1) un autre fluide fictif, le *magnétisme libre*; en tout point d'une masse continue, la densité  $l$  de ce magnétisme est définie par l'égalité

$$(37) \quad \Delta\Psi = -4\pi l.$$

En tout point de la surface de séparation de deux corps,  $a$  et  $b$ , la densité superficielle  $L$  de ce magnétisme libre est donnée par l'égalité

$$(38) \quad \frac{\partial\Psi}{\partial N_a} + \frac{\partial\Psi}{\partial N_b} = -4\pi L.$$

Ces équations sont écrites par Hertz sous une forme un peu plus particulière.

Gardons-leur la forme générale que nous leur avons donnée.

Dans la théorie classique du magnétisme, la fonction potentielle magnétique vérifie les égalités

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\mathcal{V} = -4\pi\lambda, \quad \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_a} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_b} = -4\pi\Lambda, \\ \text{avec} \\ \lambda = - \left( \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z} \right), \\ \Lambda = - \left[ \mathcal{A}_a \cos(N_a, x) + \mathcal{B}_a \cos(N_a, y) + \mathcal{C}_a \cos(N_a, z) \right. \\ \quad \left. + \mathcal{A}_b \cos(N_b, x) + \mathcal{B}_b \cos(N_b, y) + \mathcal{C}_b \cos(N_b, z) \right]. \end{array} \right.$$

Elle est la fonction potentielle ordinaire d'une distribution fictive dont les densités solide et superficielle auraient pour valeurs  $\lambda$  et  $\Lambda$ . Entre ces densités et les densités du magnétisme libre considérées par Hertz, existent les relations fort simples

$$(40) \quad \epsilon' \lambda = l, \quad \epsilon' \Lambda = L.$$

Les considérations que nous venons de développer précisent les

(1) H. HERTZ, *loc. cit.*, p. 231.

relations qui existent entre la théorie du magnétisme proposée par Hertz et la théorie développée avant lui par les divers auteurs qui, de Poisson à Helmholtz, ont écrit sur ce sujet.

Hertz semble avoir pensé que sa théorie — et ce serait son grand avantage — donnait des équations indépendantes des hypothèses que l'on peut faire sur les propriétés magnétiques du milieu (éther du vide et, pratiquement, air) au sein duquel sont supposés plongés les corps pour lesquels on énonce les lois fondamentales du magnétisme; les équations qu'il écrit contiendraient exclusivement des rapports qui garderaient la même valeur, que l'éther soit supposé très peu magnétique ou très magnétique.

« Les nouvelles constantes  $\epsilon$  et  $\mu$  que nous introduisons, dit-il<sup>(1)</sup>, sont nécessairement des nombres abstraits positifs. Nous dirons que  $\epsilon$  est la constante diélectrique et  $\mu$  la constante magnétique de la matière étudiée. Évidemment,  $\epsilon$  et  $\mu$  sont des rapports au moyen desquels nous comparons l'énergie d'une substance à l'énergie d'une autre substance. La nature d'une substance considérée isolément ne saurait déterminer la valeur qu'il convient d'attribuer à ces constantes. C'est ce que nous exprimerons en disant que la constante diélectrique et la constante magnétique ne sont pas des constantes internes pour une substance donnée. Nous avons supposé cette constante égale à 1 pour l'éther; cette supposition n'est point inexacte; mais elle ne dépend d'aucun fait d'expérience; c'est une convention que nous sommes libres de poser. »

Cette vue de Hertz n'est point exacte; elle pèche en un seul point, mais ce point est de conséquence: *Si l'on veut écrire les équations de la théorie de Hertz de telle sorte qu'elles soient équivalentes aux équations de la théorie de Helmholtz, on rencontre une catégorie de corps pour lesquels  $\mu$  dépend des propriétés magnétiques attribuées à l'éther; ce sont les aimants permanents, pour lesquels on a*

$$(27^{bis}) \quad \mu = \mu_P = \frac{1}{1 + 4\pi\epsilon'f_0}.$$

*Hertz et ses commentateurs ont tous supposé que l'on avait, exactement ou approximativement,*

$$(41) \quad \mu_P = 1.$$

(<sup>1</sup>) H. HERTZ, *loc. cit.*, p. 213; la constante que Hertz désigne ici par  $\epsilon$  n'est point celle que nous représentons par la même lettre.

Cette hypothèse équivaut à celle qui consisterait, dans la théorie de Helmholtz, à poser, exactement ou approximativement,

$$(42) \quad \epsilon' f_0 = 0,$$

c'est-à-dire à supposer que l'éther n'est pas magnétique ou ne l'est que très faiblement.

Hertz<sup>(1)</sup> se contente de dire, sans autre explication : « Nous définirons l'acier parfaitement dur comme un corps qui suit notre théorie, dont la constante magnétique est égale à 1, à l'intérieur duquel le magnétisme vrai peut être distribué d'une manière arbitraire et cependant de telle sorte que la quantité de magnétisme vrai contenue dans un morceau d'acier soit toujours égale à 0. »

M. Boltzmann<sup>(2)</sup> et, plus explicitement, M. Poincaré<sup>(3)</sup> regardent les aimants permanents comme des corps où le *magnétisme libre* diffère très peu du *magnétisme vrai*; or, au sein d'un aimant permanent, les densités solides de ces deux fluides sont liées par la relation

$$w = \mu_F l,$$

qui résulte des égalités (22 bis) et (37); MM. Boltzmann et Poincaré sont donc conduits à admettre l'exactitude de la relation (41).

Vaschy<sup>(4)</sup> a admis également qu'au sein des aimants permanents comme au sein de l'air, on devait donner à  $\mu$  la valeur 1; les raisons qu'il en donne laissent entrevoir que cette supposition est liée à cette autre hypothèse que l'air et les milieux analogues sont très faiblement magnétiques.

Supposons, pour un instant, que l'on ait  $\mu_F = 1$  et considérons un système formé exclusivement d'aimants permanents 1 plongés dans le milieu magnétique 0.

Les égalités (22 bis) et (26 bis) deviendraient

$$(22^{er}) \quad \Delta \Psi = -4\pi w_1 \text{ (dans les corps 1),}$$

$$(26^{ter}) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial N_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial N_0} = -4\pi W_1 \text{ (sur les surfaces qui limitent les aimants).}$$

(1) H. HERTZ, *loc. cit.*, p. 240.

(2) BOLTZMANN, *Vorlesungen über Maxwell's Theorie des Elektrizität und des Lichtes*, II<sup>te</sup> Theil, p. 93 (Leipzig, 1893).

(3) H. POINCARÉ, *Électricité et Optique; la Lumière et les Théories électrodynamiques*; 2<sup>de</sup> édition, p. 354 et p. 360 (Paris, 1901).

(4) A. VASCHY, *Théorie de l'Électricité*, p. 154 et p. 240 (Paris, 1896).

tandis que l'on aurait encore

$$(23^{bis}) \quad \Delta\Psi = 0 \text{ (dans le milieu 0)}$$

et

$$(20^{bis}) \quad \mathcal{F} = \frac{\eta'}{2} \int_1 \Psi w_1 d\omega_1 + \frac{\eta'}{2} \int \Psi W_1 dS_{10}.$$

Ces égalités nous donnent la proposition suivante :

*Il suffit que l'on admette l'égalité*

$$(41) \quad \mu_F = 1$$

*pour que la loi des actions mutuelles des aimants permanents plongés dans le milieu 0 puisse s'énoncer sous la forme suivante : Deux masses  $m_w$ ,  $m'_w$  de magnétisme vrai, séparées par la distance  $r$ , se repoussent avec une force*

$$\eta' \frac{m_w m'_w}{r^2}.$$

*Mais, en général, cet énoncé serait inacceptable si l'on rejetait l'hypothèse (41).*

Le rapprochement de cette proposition avec celles qui précèdent conduit à la conséquence suivante, qui nous paraît avoir son intérêt :

*Si l'on tient à sauvegarder l'exactitude de ces deux énoncés :*

*1° La théorie du magnétisme de Hertz est équivalente à la théorie de Helmholtz ;*

*2° Deux aimants permanents plongés dans l'éther agissent exactement ou sensiblement l'un sur l'autre comme si deux masses magnétiques vraies se repoussaient proportionnellement au produit du nombre qui les mesure et en raison inverse du carré de la distance qui les sépare ;*

*On est tenu de regarder comme exacte cette autre proposition :*

*L'éther doit être traité, dans la théorie de Helmholtz, comme un corps non magnétique ou peu magnétique ; dans la théorie de Hertz, la constante  $\mu_F$  doit être rigoureusement ou approximativement égale à 1.*

On ne peut, dans la théorie de Helmholtz, considérer l'éther comme n'étant pas du tout magnétique. Il existe, en effet, des corps diamagnétiques ; or, on ne peut représenter les propriétés de ces corps, comme on l'avait fait tout d'abord, en attribuant à leur coefficient

d'aimantation  $f$  une valeur négative; en effet, les recherches <sup>(1)</sup> de W. Thomson, de Beltrami, de M. Parker et de nous-même ont montré que, sur des corps où  $f$  serait négatif, la distribution magnétique serait instable. On est alors obligé de revenir à une ancienne conception d'Edmond Becquerel et de regarder les corps diamagnétiques comme des corps moins magnétiques que l'éther dans lequel ils sont plongés. Celui-ci ne peut donc être privé de toute aimantation.

Mais rien dans la théorie de Helmholtz n'empêche d'attribuer à  $\epsilon'f_0$  une très petite valeur; un corps diamagnétique aura alors un coefficient d'aimantation *apparent*  $\epsilon'f$  qui sera négatif et dont la valeur absolue sera inférieure à  $\epsilon'f_0$ ; le coefficient apparent d'aimantation de tous les corps diamagnétiques sera donc très petit en valeur absolue.

Cette conséquence s'accorde fort bien avec l'expérience. Selon W. Weber, le coefficient d'aimantation apparent  $\epsilon'f$  du bismuth, qui est le corps le plus fortement diamagnétique, est 456,000 fois plus faible que celui du fer; ce dernier ne surpasse pas 30; on a donc, pour tout corps diamagnétique,

$$|\epsilon'f| < \frac{1}{15000}.$$

On voit que l'on peut fort bien, dans la théorie traditionnelle du magnétisme, supposer que l'éther est très peu magnétique; on peut alors adopter la théorie de Hertz en y donnant à  $\mu_F$  une valeur très peu inférieure à 1.

Tout ce qui vient d'être dit suppose que l'on astreigne la théorie de Hertz à équivaloir à la théorie traditionnelle du magnétisme, telle qu'elle a été développée de Poisson à Helmholtz. On peut évidemment rejeter cette sujétion, faire table rase de toute l'œuvre composée, en un siècle d'efforts, par les théoriciens et les expérimentateurs, et poser les équations de la nouvelle théorie connue des postulats; au nombre de ces postulats, on peut faire figurer la supposition que la constante  $\mu_F$  est égale à 1. Cette manière de procéder est celle de Heaviside, de Cohn et de Hertz.

Les avantages n'en sont pas bien évidents. Les conséquences expérimentales de la nouvelle théorie concorderont en effet avec celle de la théorie traditionnelle dans laquelle on suppose l'éther très peu

(<sup>1</sup>) Voir, à ce sujet, nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, Liv. IX, Chap. VI. (T. II, p. 221.)



magnétique. A rompre tout lien avec ce que les physiciens les plus éminents ont pensé et écrit, on gagne seulement la possibilité de garder quelques équations obtenues par Maxwell (1), au moyen de raisonnements fort peu logiques et auxquels il avait renoncé dans son grand Traité; encore, en gardant les formules, est-on obligé de rejeter les idées que l'éminent physicien écossais pensait traduire par ces formules.

Ce mince avantage est compensé par un grave inconvénient.

Les équations de Poisson et de Helmholtz ne suffisent pas à rendre compte des propriétés des corps fortement magnétiques; on est alors conduit à substituer au coefficient d'aimantation une fonction magnétisante qui varie avec l'intensité d'aimantation; G. Kirchhoff a indiqué le premier cette extension naturelle de la théorie traditionnelle; nous avons montré que la thermodynamique conduisait d'emblée à la théorie ainsi généralisée, à laquelle nous avons donné de grands développements; nous avons montré également qu'une extension nouvelle, cas particulier d'une conception d'ensemble sur les modifications permanentes, permettait de représenter les lois de l'hystérésis.

Ces généralisations successives, qui découlent si aisément de la méthode traditionnelle, on n'aperçoit pas le moyen de les relier à la théorie de Hertz; en rejetant la notion d'*intensité d'aimantation*, qui est le pivot autour duquel tourne toute l'évolution scientifique dont nous venons de parler, la méthode de Hertz se rend impuissante non seulement à donner une théorie de la saturation et de l'hystérésis, mais même de dire quelle relation existe entre les lettres qui figurent dans ses formules et les grandeurs que l'expérimentateur mesure.

Ce grave inconvénient n'a échappé ni à Hertz, ni à M. Boltzmann.

« Dans l'étude de l'équilibre magnétique, dit Hertz (2), on doit tenir grand compte de cette circonstance que les corps les plus importants au point de vue des effets de l'aimantation, savoir les diverses sortes de fer et d'acier, ne présentent avec la théorie qu'un accord grossièrement approché. Ces corps, en effet, présentent du magnétisme permanent et rémanent; en eux, la polarisation de la matière pondérable est

(1) Voir notre écrit : *Les Théories électriques de J. Clerk Maxwell, Étude historique et critique*, 2<sup>e</sup> partie, chap. II.

(2) H. HERTZ, *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft*; 2<sup>te</sup> Auflage, p. 240.

partiellement indépendante de la force agissante; un seul vecteur ne suffit plus à définir l'état magnétique. En outre, les relations entre la force et les perturbations qu'elle produit ne sont plus linéaires. Donc, pour deux raisons, les corps en question sont hors du cadre de la présente théorie.»

D'autre part, M. L. Boltzmann écrit <sup>(1)</sup> en terminant l'exposé de la théorie de Hertz : « Au premier abord, il semble fort plausible que nos équations cessent d'être exactes à certains instants, de telle sorte que du magnétisme vrai puisse prendre naissance. En premier lieu, on doit remarquer qu'elles valent exclusivement pour des corps immobiles; mais, à la vérité, cette remarque ne nous sert de rien, car nous verrons plus loin que les équations données par Maxwell pour les corps en mouvement ne permettent pas davantage l'apparition de magnétisme vrai. D'autre part, on sait que ces équations exigent une correction essentielle pour beaucoup de corps magnétiques, et précisément pour les plus importants; pour ces corps, les équations cessent d'être linéaires. Néanmoins, il y a quelque chose de scabreux à fonder une notion aussi essentielle que celle du magnétisme exclusivement sur l'hypothèse que les équations de Maxwell perdent, dans certains cas, leur légitimité. »

Ainsi, pour sauvegarder des équations que Maxwell a écrites, mais qui n'étaient même pas la traduction exacte et définitive de sa pensée, on se précipite comme à plaisir au milieu de difficultés insolubles et l'on rejette la théorie traditionnelle pour laquelle toutes ces difficultés s'évanouissent. Peut-être serait-il prudent de songer combien l'*ipse dixit* a jadis entravé la marche de la science.

III. — Lorsque l'on définit les densités solide et superficielle du magnétisme vrai, à partir de la notion d'intensité magnétique, au moyen des égalités (15), (16) et (27), on obtient immédiatement la proposition suivante : *Sur un aimant permanent quelconque, la masse totale de magnétisme vrai est égale à 0.* Lorsque au contraire on admet les équations de la théorie de Hertz comme des postulats fondamentaux et premiers, sans lien avec la notion d'intensité d'aimantation, la proposition précédente apparaît comme une hypothèse indépendante dont rien, *a priori*, n'impose l'adoption. C'est, en effet, comme telle que cette proposition est formulée par Hertz.

<sup>(1)</sup> L. BOLTZMANN, *Vorlesungen über die Maxwell's Theorie der Elektrizität und des Lichtes*, 11<sup>le</sup> Theil, p. 98.

On pourrait construire une théorie où l'on n'introduirait pas cette hypothèse, et c'est précisément ce qu'il convient de faire si l'on se propose, à l'imitation de la théorie de l'équilibre magnétique, de construire une électrostatique où figurent des corps, conducteurs ou isolants, porteurs d'une charge électrique non nulle.

Nous distinguerons ici :

1° Des corps isolants  $i$  qui peuvent être électrisés;

2° Des corps conducteurs  $c$  qui peuvent également porter une charge électrique;

3° Des corps diélectriques parfaitement doux 2, homogènes ou non;

4° Un milieu diélectrique homogène 0.

Si nous gardons les notations de notre première Note, nous pourrions résumer de la manière suivante les équations fondamentales de l'électrostatique traditionnelle :

La fonction potentielle électrostatique  $V$  vérifie :

1° Au sein de chaque conducteur  $c$ , la condition

$$(43) \quad V = C,$$

$C$  ne dépendant pas de  $x, y, z$ ;

2° En chaque point d'un milieu isolant  $i$ , la condition

$$(44) \quad \Delta V = -4\pi\sigma_i,$$

où  $\sigma_i$  est donné;

3° En chaque point d'un diélectrique parfaitement doux 2, la condition

$$(45) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( 1 + 4\pi\epsilon F_1 \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 + 4\pi\epsilon F_1 \right) \frac{\partial V}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( 1 + 4\pi\epsilon F_1 \right) \frac{\partial V}{\partial z} \right] = 0;$$

4° En chaque point du milieu 0, la condition

$$(46) \quad \Delta V = 0;$$

5° Pour la surface  $S_{co}$  qui limite un conducteur, la condition

$$(47) \quad \int \frac{\partial V}{\partial N_0} dS_{co} = - \frac{4\pi}{1 + 4\pi\epsilon F_0} Q,$$

$Q$  étant la charge donnée du conducteur;

6° En chaque point de la surface  $S_{i0}$  qui limite un corps isolant électrisé, la condition

$$(48) \quad \frac{\partial V}{\partial N_i} + \left(1 + 4\pi\varepsilon F_0\right) \frac{\partial V}{\partial N_0} = -4\pi\Sigma_i,$$

$\Sigma_i$  ayant une valeur donnée;

7° En chaque point de la surface  $S_{20}$  qui limite un diélectrique, la condition

$$(49) \quad \left(1 + 4\pi\varepsilon F_0\right) \frac{\partial V}{\partial N_0} + \left(1 + 4\pi\varepsilon F_2\right) \frac{\partial V}{\partial N_2} = 0.$$

Le potentiel interne est donné par l'une quelconque des deux formules

$$(50) \quad \mathcal{F} = \frac{\varepsilon}{2} \sum CQ + \frac{\varepsilon}{2} \int_i V \tau_i d\omega_i + \frac{\varepsilon}{2} \int_{S_{i0}} V \Sigma_i dS_{i0};$$

$$(51) \quad \begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{\varepsilon}{8\pi} \int_i \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega_i \\ & + \frac{\varepsilon}{8\pi} \int_0 \left( 1 + 4\pi\varepsilon F_0 \right) \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega_0 \\ & + \frac{\varepsilon}{8\pi} \int_2 \left( 1 + 4\pi\varepsilon F_2 \right) \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega_2. \end{aligned}$$

Dans l'égalité (50), le signe  $\sum$  indique une sommation qui s'étend aux diverses masses conductrices du système.

Posons

$$(52) \quad \left| \begin{array}{l} \varepsilon V = \Psi, \\ \varepsilon C = \gamma, \\ \frac{\varepsilon \sigma_i}{1 + 4\pi\varepsilon F_i} = w_i, \\ \frac{\varepsilon \Sigma_i}{1 + 4\pi\varepsilon F_0} = W_i, \\ \frac{\varepsilon Q}{1 + 4\pi\varepsilon F_0} = M, \\ \frac{1 + 4\pi\varepsilon F_2}{1 + 4\pi\varepsilon F_0} = D_2, \\ \frac{1}{1 + 4\pi\varepsilon F_i} = D_i, \\ \frac{1 + 4\pi\varepsilon F_0}{\varepsilon D_i} = \eta \end{array} \right.$$

et les formules (43) à (52) deviendront

$$(43^{bis}) \quad \Psi = \gamma,$$

$$(44^{bis}) \quad \Delta D_i \Psi = -4\pi w_i,$$

$$(45^{bis}) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( D_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = 0,$$

$$(46^{bis}) \quad \Delta \Psi = 0,$$

$$(47^{bis}) \quad \int \frac{\partial \Psi}{\partial N_0} dS_{00} = -4\pi M,$$

$$(48^{bis}) \quad D_i \frac{\partial \Psi}{\partial N_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial N_0} = -4\pi W_i,$$

$$(49^{bis}) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial N_0} + D_2 \frac{\partial \Psi}{\partial N_2} = 0,$$

$$(50^{bis}) \quad \mathcal{F} = \frac{\gamma}{2} \sum \gamma M + \frac{\gamma}{2} \int_i \Psi w_i d\omega_i + \frac{\gamma}{2} \int_{S_{io}} \Psi W_i dS_{io},$$

$$(51^{bis}) \quad \mathcal{F} = \frac{\gamma}{8\pi} \int D \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega.$$

Dans la formule (51 bis), l'intégration s'étend à tout l'espace; D prend :

la valeur 1 au sein du milieu 0;

la valeur  $D_2$  au sein du diélectrique 2;

la valeur  $D_i$  au sein de l'isolant  $i$ .

Au sein d'un conducteur  $c$ , la valeur de D est arbitraire, car au sein de ce corps, on a, en vertu de l'égalité (43 bis),

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0.$$

Les suppositions que l'on peut faire sur la valeur absolue de la quantité  $\epsilon F_0$ , c'est-à-dire sur les propriétés diélectriques de l'éther, n'influent que sur la valeur de la constante  $D_i$ ; sauf en ce point, les équations ne contiennent que les rapports  $\frac{\epsilon}{1 + 4\pi\epsilon F_0}$  et  $\frac{1 + 4\pi\epsilon F_2}{1 + 4\pi\epsilon F_0}$ ; d'autre part, la constante  $D_i$  ne figure dans les équations que si le système renferme des corps isolants; nous arrivons donc à la conclusion suivante :

*Si un système renferme des corps conducteurs électrisés et des diélec-*

*triques parfaitement doux, mais point de corps d'état électrique invariable (corps isolants), on peut mettre les équations de l'Électrostatique traditionnelle sous une forme telle qu'elles ne dépendent plus des hypothèses que l'on peut faire sur les propriétés diélectriques du milieu éthéré.*

Cette forme est précisément celle qu'ont proposée Heaviside, Hertz et M. Cohn; elle diffère à peine de celle à laquelle Maxwell avait fini par aboutir et à laquelle est consacrée la Note 1.

Supposons que le système renferme seulement des corps conducteurs et le milieu éthéré 0; la fonction  $\Psi$  devra avoir sur chaque conducteur une valeur  $\gamma$  indépendante de  $x, y, z$ ; elle devra vérifier l'équation de Laplace hors des conducteurs, et, pour chaque conducteur, vérifier l'égalité (47 bis); en outre, l'expression du potentiel interne, donnée par l'égalité (50 bis), se réduira à

$$(53) \quad \mathcal{F} = \frac{\epsilon}{2} \sum \gamma M.$$

A chaque charge électrique  $q$  distribuée sur un élément d'une surface conductrice, faisons correspondre une charge  $m$  par la relation

$$(54) \quad \frac{\epsilon q}{1 + 4\pi\epsilon F_0} = m.$$

Pour chaque conducteur, la somme des masses  $q$  est la charge  $Q$  et la somme des masses  $m$  est la masse  $M$ .

Ce que nous venons de dire montre que les forces qui s'exercent à l'intérieur du système sont les mêmes que si deux masses  $m, m'$ , séparées par la distance  $r$ , se repoussaient avec une force.

$$\epsilon \frac{mm'}{r^2}.$$

Selon les égalités (52) et (54), elles sont aussi les mêmes que si deux charges  $q, q'$  se repoussaient avec une force

$$\frac{\epsilon}{1 + 4\pi\epsilon F_0} \frac{qq'}{r^2}$$

Toutes ces propositions s'accordent également bien avec l'électrostatique classique et avec l'électrostatique de Hertz.

Hertz n'a pas considéré le cas où le système renferme des corps

isolants porteurs de charges électriques ; il est pourtant bien nécessaire de considérer de tels corps, si l'on veut rendre compte des faits électrostatiques les plus classiques, fût-ce de l'expérience de Thalès de Milet. Aussi M. L. Boltzmann fait-il figurer ces corps dans ses raisonnements<sup>(1)</sup>.

Il se propose, en particulier, d'étudier les actions mécaniques qui se produisent au sein d'un système formé de corps conducteurs et de corps isolants électrisés plongés dans le milieu diélectrique 0. A cet effet, il prend pour point de départ l'expression (51 bis) du potentiel interne, puis il la transforme en supposant que  $D = 1$ , dans tout l'espace, la même valeur (2).

Cette valeur ne peut alors être que la valeur 1, puisque, pour le milieu 0,  $D = 1$  par définition. Si l'on admet cette valeur, on trouve sans peine que les actions mécaniques peuvent se calculer en supposant que deux charges quelconques  $m, m'$ , d'électricité vraie, placées soit sur des conducteurs, soit sur des isolants, et séparées par la distance  $r$ , se repoussent avec la force

$$r_i \frac{mm'}{r^2}.$$

C'est en effet ce résultat qu'obtient M. Boltzmann.

Mais est-il loisible d'admettre qu'au sein de corps soit conducteurs, soit isolants,  $D = 1$  exactement ou approximativement la valeur 1 ?

Nous avons vu qu'au sein des corps conducteurs, on pouvait attribuer à  $D$  une valeur entièrement arbitraire ; on peut donc, si l'on veut, y faire  $D = 1$ .

Mais au sein des corps isolants, on a nécessairement

$$D = D_i = \frac{1}{1 + 4\pi\epsilon F_0}.$$

Admettre que  $D_i$  est exactement égal à 1, ce serait admettre que  $\epsilon F_0$  est rigoureusement nul ou que l'éther est incapable de polarisation diélectrique ; cette hypothèse rendrait incompréhensible, dans la théorie traditionnelle de la polarisation diélectrique, la propagation des ondes Hertiennes.

(1) L. BOLTZMANN, *Vorlesungen über die Maxwell's Theorie der Electricität und des Lichtes* ; I<sup>re</sup> Theil, p. 106 et 110 ; II<sup>re</sup> Theil, p. 54 (Leipzig, 1891 et 1893).

(2) L. BOLTZMANN, *Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektrizität und des Lichtes*, II<sup>re</sup> Theil, p. 56 « Ist  $D$  constant, ... »

Admettre que  $D_i$  diffère peu de 1, ou que l'éther est très faiblement polarisable, ce serait introduire dans l'étude de l'électrostatique une hypothèse analogue à celle que nous avons regardée comme légitime dans l'étude des aimants. Mais cette hypothèse serait-elle légitime ici ?

*Si l'on veut que la théorie traditionnelle de la polarisation diélectrique fournisse, selon la méthode tracée par Helmholtz, une théorie de la propagation des actions électriques qui concorde avec les lois essentielles posées par Maxwell <sup>(1)</sup>, on est conduit à l'hypothèse suivante :*

*Le produit  $\epsilon F_0$  est très grand par rapport à  $\frac{1}{4\pi}$ .*

Cette hypothèse, comme nous l'avons montré ailleurs <sup>(2)</sup>, est un retour à une ancienne supposition de Faraday et de Mossotti.

Cette hypothèse revient à celle-ci :

*La constante  $D_i$  est très voisine de 0.*

Telle est la conclusion à laquelle nous parvenons, si nous voulons maintenir l'accord entre la théorie traditionnelle des diélectriques et les formules de Maxwell et de Hertz. Il est clair qu'on peut regarder cet accord comme de nulle valeur ; on est alors libre d'attribuer à  $D_i$  la valeur que l'on voudra. Mais nous avons montré, à propos des théories magnétiques, les inconvénients d'une telle méthode.

<sup>(1)</sup> Sur la Théorie électrodynamique de Helmholtz et la Théorie électromagnétique de la lumière (Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, série II, t. V, p. 227 ; 1901).

<sup>(2)</sup> Les Théories électriques de J. Clerk Maxwell. 1<sup>re</sup> partie, chap. I, § 4.





# SUR LA DÉFORMATION FINIE D'UN MILIEU CONTINU

Par M. O. MANVILLE

PRÉPARATEUR DE PHYSIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

---

## CHAPITRE PREMIER

### Introduction Historique.

---

#### § 1<sup>er</sup>. — *Les six fonctions caractéristiques de la déformation d'un milieu.*

L'étude de la déformation d'un milieu quelconque, dans le cas le plus général, a été faite pour la première fois par CAUCHY <sup>(1)</sup>. « Lorsqu'un corps solide vient à changer de forme, dit-il, et que par l'effet d'une cause quelconque il passe d'un premier état naturel à un second état distinct du premier, chaque élément du volume se condense ou se dilate, et les divers éléments offrent en général des condensations ou des dilatations diverses. Il y a plus, la condensation ou la dilatation du corps en un point donné peut n'être pas la même dans tous les sens. »

Nous allons donner un aperçu de la méthode de Cauchy ; elle a une importance capitale, comme nous le verrons dans la suite, et a servi de point de départ au travail de MM. Cosserat <sup>(2)</sup>.

« Rapportons tous les points de l'espace à trois axes rectangulaires

(1) CAUCHY, *Sur la condensation et la dilatation des corps solides (Anciens exercices de mathématiques, 2<sup>e</sup> année, p. 60 et suiv. ; 1827. — Œuvres de Cauchy, 2<sup>e</sup> série, t. VII, p. 82).*

(2) E. et F. COSSERAT, *Mémoire sur la théorie de l'Elasticité (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. X ; 1896).*

et supposons que le point matériel correspondant aux coordonnées  $x, y, z$ , dans le dernier état du corps solide, soit précisément celui qui, dans le premier état du même corps, avait pour coordonnées

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta.$$

Si l'on prend  $x, y, z$  pour variables indépendantes,  $\xi, \eta, \zeta$  seront des fonctions de  $x, y, z$ , qui serviront à mesurer les déplacements du point que l'on considère parallèlement aux axes de coordonnées. Soit d'ailleurs  $r$  la distance qui, dans le deuxième état du corps, sépare deux molécules  $m$  et  $m'$ , correspondant aux coordonnées  $x, y, z$  et  $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ , en sorte qu'on ait :

$$r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

Comme ces deux molécules seront celles qui, dans le premier état, avaient pour coordonnées  $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$  et

$$\begin{aligned} x + \Delta x &= \left( \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \Delta z + \dots \right) \\ y + \Delta y &= \left( \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \eta}{\partial z} \Delta z + \dots \right) \\ z + \Delta z &= \left( \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Delta z + \dots \right) \end{aligned}$$

il est clair que si on désigne par

$$\frac{r}{1 + \varepsilon}$$

leur distance primitive, on trouvera :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \left( \frac{r}{1 + \varepsilon} \right)^2 &= \left( \Delta x - \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial \xi}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial \xi}{\partial z} \Delta z - \dots \right)^2 \\ &+ \left( \Delta y - \frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial \eta}{\partial z} \Delta z - \dots \right)^2 \\ &+ \left( \Delta z - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Delta z - \dots \right)^2 \end{aligned} \right.$$

Soient maintenant  $\alpha, \beta, \gamma$ , les angles que forme avec les demi-axes de

coordonnées positives le rayon vecteur  $r$  mené de la molécule  $m$  à la molécule  $m'$ . On aura évidemment :

$$\Delta x = r \cos \alpha, \Delta y = r \cos \beta, \Delta z = r \cos \gamma,$$

et, en supposant la distance  $r$  infiniment petite, on tirera de la formule (1) :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \left( \frac{1}{1 + \varepsilon} \right)^2 &= \left( \cos \alpha - \frac{\partial \xi}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cos \beta - \frac{\partial \xi}{\partial z} \cos \gamma \right)^2 \\ &+ \left( \cos \beta - \frac{\partial \eta}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial \eta}{\partial y} \cos \beta - \frac{\partial \eta}{\partial z} \cos \gamma \right)^2 \\ &+ \left( \cos \gamma - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cos \beta - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cos \gamma \right)^2. \end{aligned} \right.$$

La quantité  $1 + \varepsilon$ , déterminée par (2) n'est autre que le rapport du rayon vecteur  $r$  à l'expression  $\frac{r}{1 + \varepsilon}$ , c'est-à-dire le rapport entre les distances qui séparent les deux molécules infiniment voisines  $m$  et  $m'$  dans les deux états du corps.

Par suite, la valeur numérique de  $\varepsilon$  servira de mesure à ce qu'on peut nommer la *condensation* ou la *dilatation linéaire* du corps suivant la direction du rayon vecteur  $r$ .

Concevons à présent qu'à partir du point  $x, y, z$ , on porte sur la droite qui forme avec les demi-axes de coordonnées positives les angles  $\alpha, \beta, \gamma$ , une longueur équivalente à  $1 + \varepsilon$ , et désignons par  $x + X, y + Y, z + Z$ , les coordonnées de l'extrémité de cette longueur; on aura

$$\frac{X}{\cos \alpha} = \frac{Y}{\cos \beta} = \frac{Z}{\cos \gamma} = \pm (1 + \varepsilon)$$

et la formule (2) donnera :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \left( X - \frac{\partial \xi}{\partial x} X - \frac{\partial \xi}{\partial y} Y - \frac{\partial \xi}{\partial z} Z \right)^2 &+ \left( Y - \frac{\partial \eta}{\partial x} X - \frac{\partial \eta}{\partial y} Y - \frac{\partial \eta}{\partial z} Z \right)^2 \\ &+ \left( Z - \frac{\partial \zeta}{\partial x} X - \frac{\partial \zeta}{\partial y} Y - \frac{\partial \zeta}{\partial z} Z \right)^2 = 1. \end{aligned} \right.$$

Cette dernière équation représente un ellipsoïde dont la construction suffit pour indiquer les rapports qui existent entre les dilatations ou

condensations linéaires dans les différentes directions autour du point  $(x, y, z)$ .

On peut, en effet, tirer de (2) et (3) les valeurs de  $\varepsilon$  et de  $\alpha, \beta, \gamma$ , qui correspondent aux condensations et dilatations linéaires principales. Posons pour abrégé

$$\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2 = \Theta,$$

et

$$\begin{aligned} (4) \quad A &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - 1\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2, \\ B &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - 1\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2, \\ C &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - 1\right)^2, \\ D &= \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - 1\right) \frac{\partial \eta}{\partial z} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - 1\right) \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ E &= \frac{\partial \xi}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - 1\right) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - 1\right) \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ F &= \frac{\partial \xi}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - 1\right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - 1\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{aligned}$$

Nous aurons

$$(5) \quad \Theta = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma + 2 D \cos \beta \cos \gamma \\ + 2 E \cos \gamma \cos \alpha + 2 F \cos \alpha \cos \beta$$

$$(6) \quad AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EZX + 2FXY = 1.$$

Les relations (4) définissent donc bien la déformation la plus générale d'un milieu quelconque.

Cauchy étudie ensuite les propriétés de l'ellipsoïde de condensation ou de dilatation dans le cas général; mais, cette étude faite, il suppose la déformation infiniment petite et réduit les formules (4) aux infiniment petits du premier ordre.

L'étude de la déformation infiniment petite d'un milieu quelconque a fait l'objet, de la part de Cauchy, d'une série de mémoires<sup>(1)</sup> qui

(1) CAUCHY, *Œuvres*, 2<sup>e</sup> série, t. VII et t. VIII. — *Anciens Exercices de mathématiques*, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> années; 1827-1830.

constituent aujourd'hui l'une des plus belles pages de la physique-mathématique; c'est sur ces mémoires que repose la théorie mathématique de l'élasticité.

En 1829, dans un mémoire <sup>(1)</sup> que l'on retrouve inachevé dans le cinquième volume des *Anciens Exercices de mathématiques*, Cauchy avait montré comment les lois de la propagation et de la polarisation de la lumière pouvaient se déduire des équations aux dérivées partielles qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsions mutuelles. Mais ses formules ne pouvant expliquer le phénomène de la dispersion de la lumière, Cauchy reprit le problème <sup>(2)</sup>. Les nouvelles formules expliquèrent bien le phénomène de la dispersion, mais conduisirent, d'autre part, à une contradiction dans le problème de la réflexion et de la réfraction.

C'est à propos de cette contradiction qu'en 1837 GREEN <sup>(3)</sup> se proposa de reprendre le problème de la réflexion et de la réfraction de la lumière en partant d'un principe différent de celui qu'avait employé Cauchy.

Nous allons exposer en quelques mots la méthode de Green; elle renferme une part d'idée que Navier <sup>(4)</sup> avait déjà émise en 1827.

« Quelle que soit la manière dont les éléments d'un système matériel agissent les uns sur les autres, dit Green, si on multiplie toutes les forces internes produites, par les éléments de leurs directions respectives, la somme totale pour une portion assignée de la masse sera toujours la différentielle exacte de quelque fonction <sup>(5)</sup>. »

Autrement dit, les forces intérieures admettent *un potentiel*. C'était cette idée qu'avait énoncée Navier dans son mémoire de 1827.

Green considère son principe comme une nécessité.

(1) CAUCHY, *Applications des formules qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle à la théorie de la lumière* (*Anciens Exercices de mathématiques*, 5<sup>e</sup> année, 1830).

(2) CAUCHY, *Mémoire sur la dispersion de la lumière* (*Nouveaux Exercices de mathématiques*, 1830; *Œuvres de Cauchy*, 2<sup>e</sup> série, t. X, 1894).

(3) GREEN, *On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two non crystallized media* (*Mathematical Papers*, p. 243; *Cambridge Philosophical Society Proceedings*, 1838).

(4) NAVIER, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VII, p. 376; 1827).

(5) GREEN, *Mathematical Papers*, C. F., p. 245.

« En vérité, dit-il, si cela n'avait pas lieu, un mouvement perpétuel serait possible, et nous avons plusieurs raisons de penser que les forces dans la nature sont disposées de telle sorte que cela soit impossible (1). »

Dans ce mémoire, Green ne s'occupe que des milieux isotropes et néglige toutes les actions externes, telles que celles qui seraient dues, par exemple, aux particules solides des corps transparents sur le milieu élastique, bien qu'il suppose que ce milieu pénètre les interstices des corps transparents. C'était là l'écueil rencontré par Cauchy.

Aussi, dans un supplément à ce mémoire où il met les équations dues à la surface de séparation des deux milieux et celles de la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence sous une forme plus simple, écrit-il : « Je suis incliné à penser que dans le cas des corps non cristallisés l'action des particules solides sur le milieu élastique n'altère pas la forme des résultats, car son influence ne se fait sentir que dans les termes de degré plus élevé que ceux qui ont été négligés dans le développement de la fonction qui représente le travail des forces internes (2). »

Mais pouvait-on faire cette supposition dans les corps cristallisés ? C'est pour y répondre que Green fit paraître en 1839 un nouveau mémoire (3) où le problème de la déformation d'un milieu dans le cas général est complètement traité. Green se propose en effet de résoudre le problème suivant :

Étant donné un système composé d'un nombre immense de particules agissant les unes sur les autres, et en outre, assujetties à l'influence d'actions étrangères, si on désigne par  $x, y, z$ , les coordonnées d'une particule du système dans l'état primitif (celui de l'équilibre sous une pression uniforme par exemple), par  $x', y', z'$  les coordonnées de cette même particule au temps  $t$ ,  $x', y', z'$  seront des fonctions de  $x, y, z, t$ . Si, maintenant, l'on considère dans ce milieu un parallélépipède rectangle dont les côtés sont  $dx, dy, dz$ , on se propose de déterminer quels seront, au temps  $t$ , la forme et les éléments de ce petit parallélépipède.

(1) GREEN, *Mathematical Papers*, C. F., p. 248.

(2) GREEN, *Mathematical Papers*, Supplement to a Memoir on the reflexion and refraction of light, p. 283.

(3) GREEN, *On the propagation of light in crystallized media*. *Mathematical Papers*, p. 291. — Cambridge Philosophical Society, 1839.

Au temps  $t$ , le parallélépipède aura la forme d'un parallélépipède obliquangle dont les trois arêtes auront des longueurs données par les relations

$$\begin{aligned}(dx')^2 &= \left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 \right\} = a^2 dx^2, \\(dy')^2 &= \left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial y} \right)^2 \right\} = b^2 dy^2, \\(dz')^2 &= \left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial z} \right)^2 \right\} = c^2 dz^2.\end{aligned}$$

Les angles de ces arêtes seront déterminés au moyen de leurs cosinus  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , par les relations

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial z}}{\sqrt{\left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial y} \right)^2 \right\} \left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial z} \right)^2 \right\}}}, \\ \beta &= \frac{\frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial z}}{\sqrt{\left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 \right\} \left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial z} \right)^2 \right\}}}, \\ \gamma &= \frac{\frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial y}}{\sqrt{\left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 \right\} \left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial y} \right)^2 \right\}}}.\end{aligned}$$

Si nous posons

$$\begin{aligned}bc &= \sqrt{\left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial y} \right)^2 \right\} \left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial z} \right)^2 \right\}}, \\ ca &= \sqrt{\left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 \right\} \left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial z} \right)^2 \right\}}, \\ ab &= \sqrt{\left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 \right\} \left\{ \left( \frac{\partial x'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial y} \right)^2 \right\}}.\end{aligned}$$



nous pourrons écrire :

$$\begin{aligned} \alpha' &= bc\alpha = \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial z}, \\ \beta' &= ac\beta = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial z}, \\ \gamma' &= ab\gamma = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial y}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $\Phi dx dy dz$  soit le potentiel dû aux actions mutuelles des particules qui composent l'élément dont le volume primitif est  $dx dy dz$ . Puisque  $\Phi$  doit reprendre la même valeur quand les côtés  $dx'$ ,  $dy'$ ,  $dz'$  et les cosinus  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  des angles du parallélipède obliquangle reviennent à leurs positions et à leurs valeurs primitives, la forme la plus générale de  $\Phi$  est

$$\Phi = \Phi(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma).$$

La forme de la fonction  $\Phi$  dépend de la nature du milieu considéré. Or, puisque  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont positifs ainsi que  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , nous pouvons encore écrire  $\Phi$  sous la forme :

$$\Phi(a^2, b^2, c^2, \alpha', \beta', \gamma').$$

« Les expressions précédentes de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , sont complètement générales, dit Green, quel que puisse être le dérangement. »

Si maintenant nous posons

$$\begin{aligned} x' &= x + u(x, y, z, t) \\ y' &= y + v(x, y, z, t) \\ z' &= z + w(x, y, z, t) \end{aligned}$$

nous pouvons écrire  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  sous la forme

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} a^2 &= 1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ b^2 &= 1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ c^2 &= 1 + 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2, \\ \alpha' &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \beta' &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma' &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Ces quantités ne sont pas les mêmes que celles données par Cauchy; mais si l'on se rappelle que Cauchy a rapporté la déformation au milieu déformé, on voit sans peine l'analogie qui existe entre elles et que Cauchy est bien le premier auteur qui ait donné les expressions des composantes de la déformation la plus générale d'un milieu.

Des formules (7) Green ne prend que les infiniment petits du premier ordre pour traiter le problème qu'il s'était proposé.

En 1844, Barré de Saint-Venant <sup>(1)</sup> établit à nouveau les relations (7) et montra que les  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  sont les six fonctions qui déterminent complètement la déformation la plus générale éprouvée par un milieu quelconque.

Les auteurs qui, à la suite de Barré de Saint-Venant, se sont occupés de la théorie de l'élasticité, n'ont guère traité que le cas des déformations infiniment petites.

En 1863, Sir W. Thomson fit paraître un mémoire <sup>(2)</sup> qui porte en appendice *General Theory of the Equilibrium of an Elastic Solid* <sup>(3)</sup>. » C'est dans cet appendice que Sir W. Thomson traite le problème général de la déformation d'un solide ne présentant ni condition d'isotropie d'une part, ni homogénéité d'autre part. Voici l'énoncé du problème qu'il se pose :

« Soit un solide composé de matière ne remplissant ni la condition d'isotropie, ni la condition d'homogénéité, de forme donnée, mais non déformé. Supposons que chaque point de sa surface subisse un changement de position, d'une grandeur et d'une direction données. On se propose de trouver le déplacement de chaque point de cette matière en équilibre. »

Si l'on appelle  $x$ ,  $y$ ,  $z$  les coordonnées d'une particule P de la substance dans la position qu'elle occupe avant la déformation et  $x + u$ ,  $y + v$ ,  $z + w$  ses coordonnées quand elle est déplacée de la manière

(1) BARRÉ DE SAINT-VENANT, Sur les pressions qui se développent à l'intérieur des corps solides, lorsque les déplacements de leurs points, sans altérer l'élasticité du corps, ne peuvent cependant être considérés comme très petits (*Procès-verbaux de la Société Philomathique de Paris*, 1844, p. 26. — TODHUNTER, *History of Elasticity*, vol. I, p. 866).

(2) W. THOMSON, *The Dynamical Problems regarding Elastic spheroidal Shells and Spheroids of incompressible liquid* (*Mathematical and Physical Papers*, vol. III, p. 351).

(3) *Appendix* § 59-71 (*Mathematical and Physical Papers*, vol. III, p. 386).

indiquée, on sait que  $u, v, w$  sont les composantes du déplacement; l'on pose, pour abréger,

$$A = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$B = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

$$C = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2,$$

$$a = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$b = \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1\right) + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$c = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1\right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Ces six quantités  $A, B, C, a, b, c$  déterminent entièrement la déformation éprouvée par la substance dans le voisinage de la particule  $P$ .

Elles sont de plus identiques aux formules (7) données par Green. Mais à partir de ce moment le mémoire de Sir W. Thomson prend une orientation toute différente. Revenant sur des résultats énoncés en 1855<sup>(1)</sup>, il rattache la théorie de l'élasticité aux principes de la thermodynamique.

L'étude systématique de la déformation générale d'un milieu ne commence à apparaître que dans le *Treatise on natural Philosophy* de Sir W. Thomson et Tait<sup>(2)</sup>. Après avoir défini ce qu'ils appelleront *déformation en général*, les auteurs étudient d'une façon très détaillée ce qu'ils appellent une *déformation homogène*. Il est à noter que leur étude ne se fait pas en partant des équations générales qui définissent  $A, B, C, a, b, c$ ; elle repose sur la définition suivante qu'on peut considérer comme une intuition ou mieux comme la généralisation des résultats auxquels conduit l'étude directe du système différentiel définissant une déformation infiniment petite :

(<sup>1</sup>) W. THOMSON, *On the thermo-elastic Properties of matter (Mathematical and Physical Papers, vol. I, p. 293)*.

(<sup>2</sup>) W. THOMSON et TAIT, *Treatise on natural Philosophy, vol. I, p. 116, 1879*.

*Définition de la déformation homogène :*

« Supposons qu'une substance éprouve une certaine déformation. Nous dirons que cette déformation est une déformation homogène si des points équidistants les uns des autres et distribués sur des droites parallèles avant la déformation, sont encore équidistants et situés sur des droites parallèles après la déformation, quels que soient les changements éprouvés par leur mutuelle distance initiale ou par la direction initiale des droites. »

Comme on le voit, cette définition n'est pas autre chose que la définition de ce qu'on appelle en géométrie une *transformation homographique*; c'est ce caractère géométrique de la déformation homogène ainsi définie qui a permis à Sir W. Thomson et à Tait de faire une étude détaillée des propriétés cinématiques d'une semblable déformation. Pour étudier ensuite la déformation générale, Thomson et Tait font l'hypothèse que, dans le voisinage de la particule P, les six fonctions A, B, C, a, b, c qui définissent la déformation générale conservent sensiblement les mêmes valeurs que celles qu'elles ont au point P. On est ainsi amené à substituer à la déformation d'une portion du milieu entourant un point P ( $x, y, z$ ), lorsque cette portion est suffisamment petite, une déformation homogène dont les six composantes sont les valeurs que prennent au point ( $x, y, z$ ) les six fonctions A, B, C, a, b, c. Cette hypothèse est généralement admise. Nous verrons dans le cours de ce travail comment on peut, en partant des équations générales qui définissent une déformation, justifier analytiquement les résultats obtenus par Thomson et Tait.

§ 2. — *Le Problème de Barré de Saint-Venant.*

Dans les pages précédentes, nous avons vu que la déformation la plus générale d'un milieu quelconque était caractérisée par la connaissance de six fonctions que nous désignerons dorénavant par  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , pour nous conformer aux notations usuelles.

Nous avons vu également que les recherches des physiciens mathématiciens avaient presque uniquement porté sur le cas où ces quantités étaient exprimées par des infiniment petits du premier ordre. Mais personne jusqu'en 1864 ne s'était proposé de résoudre le problème réciproque qu'on peut énoncer de la manière suivante :

PROBLÈME. — *Peut-on prendre six fonctions arbitraires quelconques  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , pour représenter une déformation?*

Ce fut Barré de Saint-Venant<sup>(1)</sup> qui, le premier, se posa cette question et qui en donna une solution pour le cas des déformations infiniment petites.

Supposons, dit-il, que nous ayons les équations

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_3, \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_3, \end{array} \right.$$

et cherchons les conditions de compatibilité. Les déplacements  $u, v, w$  ne peuvent être qu'évalués en fonction de  $x, y, z$ ; si donc nous intégrons le long d'une ligne menée par l'origine, nous aurons

$$u = u_0 + \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right),$$

où  $u_0$  est la valeur de  $u$  à l'origine. De la même manière, nous pouvons avoir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + \int \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dz \right), \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 + \int \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz \right), \end{aligned}$$

où les intégrales peuvent être prises le long d'une ligne allant de l'origine au point  $(x, y, z)$ ; la valeur de chacune de ces intégrales doit être indépendante du chemin d'intégration. Si maintenant nous utilisons les équations (A), nous pourrions écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + \int \left\{ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} dx + \left( \frac{\partial \gamma_3}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \right) dz \right\}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 + \int \left\{ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \right) dy + \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial x} \right) dz \right\}, \end{aligned}$$

(1) BARRÉ DE SAINT-VENANT, *Résumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, 1864.  
— Voir aussi LOVE, *Treatise on the mathematical theory of elasticity*, t. I<sup>er</sup>, p. 122.

Les intégrales seront indépendantes du chemin d'intégration si l'on a les égalités

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial z \partial x}, \\ \begin{cases} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial z \partial x} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x \partial y} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial y \partial z} \end{cases} \end{cases}$$

auxquelles peut être ajoutée l'équation

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial y \partial z}.$$

Les six fonctions  $\varepsilon_i, \gamma_i$  ne peuvent donc pas être choisies arbitrairement pour définir une déformation infiniment petite; il est nécessaire qu'elles vérifient un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre (B).

M. Boussinesq<sup>(1)</sup>, en 1871, retrouva par une autre méthode les équations (B) de Barré de Saint-Venant.

Soient  $x_0, y_0, z_0$ , un ensemble de valeurs particulières de  $x, y, z$ ; désignons par  $f_1, f_2, f_3$  trois fonctions arbitraires; puis intégrons les trois premières équations du système (A); nous aurons :

$$(C) \quad \begin{cases} u = \int_{x_0}^x \varepsilon_1 dx + f_1(y, z), \\ v = \int_{y_0}^y \varepsilon_2 dy + f_2(z, x), \\ w = \int_{z_0}^z \varepsilon_3 dz + f_3(x, y). \end{cases}$$

(1) BOUSSINESQ, Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solide élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2<sup>e</sup> série, t. XVI, 1871, p. 133).

Ces valeurs de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , portons-les dans les trois autres formules de (A); nous aurons :

$$(D) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial y} &= \gamma_1 - \int_{v_0}^y \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z} dy - \int_{z_0}^z \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y} dz, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z} &= \gamma_2 - \int_{z_0}^z \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial x} dz - \int_{x_0}^x \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} dx, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \gamma_3 - \int_{x_0}^x \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} dx - \int_{y_0}^y \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} dy. \end{aligned} \right.$$

Ces égalités-ci, respectivement différenciées en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et résolues ensuite par rapport aux trois dérivées secondes qui entrent alors dans leurs premiers membres, donnent :

$$(E) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \right) - \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y \partial z} dx, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} \right) - \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z \partial x} dy, \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} \right) - \int_{z_0}^z \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} dz. \end{aligned} \right.$$

En exprimant que les premiers membres, et par suite les seconds, sont respectivement indépendants de  $x$ , de  $y$ , de  $z$ , on obtient à titre de conditions nécessaires les trois dernières équations (E). D'ailleurs, si celles-ci sont vérifiées, et si  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  désignent six fonctions d'une seule variable, il est évident qu'on aura en intégrant les relations (E) :

$$(G) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1 &= F_1(y) + \varphi_1(z) + \int_{v_0}^y \int_{z_0}^z \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} dy dz, \\ f_2 &= F_2(z) + \varphi_2(x) + \int_{z_0}^z \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} dz dx, \\ f_3 &= F_3(x) + \varphi_3(y) + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} dx dy, \end{aligned} \right.$$

où les intégrales doubles, dans lesquelles on pourra remplacer les dérivées secondes de  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  par leurs valeurs (E), seront des fonctions déterminées de  $y$  et de  $z$ , de  $z$  et de  $x$ , de  $x$  et de  $y$ .

Les relations (G) étant équivalentes à (E), le sont par suite aux

relations (D), différenciées respectivement en  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; pour qu'elles le deviennent aux relations (D) elles-mêmes, il faut et il suffit qu'elles vérifient ces relations (D) respectivement pour  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $z = z_0$ , c'est-à-dire qu'on ait pour

$$(H) \left\{ \begin{array}{ll} x = x_0 & F'_2(z) + \varphi'_3(y) = \gamma_1 - \int_{y_0}^y \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial z} dy - \int_{z_0}^z \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y} dz, \\ y = y_0 & F'_3(x) + \varphi'_1(z) = \gamma_2 - \int_{x_0}^x \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial x} dz - \int_{z_0}^z \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} dx, \\ z = z_0 & F'_1(y) + \varphi'_2(x) = \gamma_3 - \int_{x_0}^x \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} dx - \int_{y_0}^y \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} dy. \end{array} \right.$$

Chacune de ces dernières est elle-même possible à la condition nécessaire et suffisante que la dérivée seconde de son second membre en  $y$  et  $z$  pour la première, en  $z$  et  $x$  pour la seconde, en  $x$  et  $y$  pour la troisième, soit nulle comme l'est la dérivée partielle du premier membre. On obtient ainsi les trois autres conditions (B) qui sont vraies non seulement pour  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $z = z_0$ , mais encore et par suite pour des valeurs quelconques de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; on le reconnaît d'ailleurs directement en différenciant (D) au lieu des relations plus particulières (H). Celles-ci donneront les six dérivées  $F'$ ,  $\varphi'$ , avec trois constantes arbitraires qui paraîtront une fois avec le signe + et une fois avec le signe —, la première dans  $F'_2$  et  $\varphi'_3$ , la seconde dans  $F'_3$  et  $\varphi'_1$ ; la troisième dans  $F'_1$  et  $\varphi'_2$ . On intégrera une fois pour obtenir les fonctions  $F$  et  $\varphi$  et les expressions de  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  contiendront en tout six constantes arbitraires qui correspondront à un petit mouvement d'ensemble quelconque du corps.

Les deux solutions qu'on vient de lire ne résolvaient pas complètement le problème posé par de Saint-Venant. Elles indiquaient les *conditions nécessaires* auxquelles devaient satisfaire six fonctions  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$  pour définir une déformation infiniment petite d'un milieu; mais elles ne prouvaient pas que ces conditions fussent aussi suffisantes. En 1886, BELTRAMI<sup>(1)</sup> montra, par une méthode élégante, que les équations de Barré de Saint-Venant étaient les conditions à la fois nécessaires et suffisantes.

(<sup>1</sup>) BELTRAMI, Note à la suite de son mémoire *Sull' interpretazione meccanica delle formole di Maxwell* (Mémoires de Bologne, 1886, série IV, t. VII. — Voir aussi CESARO, *Introduzione alla teoria matematica della Elasticità*, p. 19).



Supposons, dit-il, que nous nous donnions 3 fonctions  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , définies de la manière suivante :

$$(7) \quad v = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Le système différentiel définissant les  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$  pourra alors s'écrire :

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_1, & \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_3 + r, & \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_2 - r, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_3 - r, & \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_2, & \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_1 + p, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_2 + q, & \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma_1 - p, & \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_3. \end{cases}$$

Mais (8) est un système différentiel total. Alors les conditions *nécessaires et suffisantes* pour qu'il existe trois fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , vérifiant ce système, sont, pour la fonction  $u$  par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} &= \frac{\partial (\gamma_3 - r)}{\partial x}, & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} &= \frac{\partial (\gamma_2 + q)}{\partial x}, \\ \frac{\partial (\gamma_3 - r)}{\partial z} &= \frac{\partial (\gamma_2 + q)}{\partial y}. \end{aligned}$$

La dernière peut s'écrire

$$\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial y}.$$

On trouverait de même pour les fonctions  $v$ ,  $w$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial z}, \\ \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} &= \frac{\partial \gamma_3}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}. \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre ces trois relations ; nous aurons :

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0,$$

d'où nous tirons

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = - \left( \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial z};$$

de même

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial y} &= \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial y}. \end{aligned}$$

Par un calcul identique, fait pour  $v$  et  $w$ , on voit que l'on aura :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial z}, & \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial x}, & \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial \gamma_3}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y}, & \frac{\partial q}{\partial y} &= \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial z}, & \frac{\partial q}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial z}, & \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi quand on se donne  $\varepsilon_i, \gamma_i, p, q, r$ , les conditions nécessaires et suffisantes pour que les trois fonctions  $u, v, w$  existent, sont que le système (9) soit identiquement vérifié.

Or,  $p, q, r$  seront déterminées par ce système (9) si on peut l'intégrer en se donnant  $\varepsilon_i, \gamma_i$ . Ecrivons donc les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des intégrales  $p, q, r$ . On doit avoir identiquement  $\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}$  et des relations analogues, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial z \partial y} &= - \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z \partial x} &= - \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial z \partial y}. \end{aligned}$$

Mais, puisqu'on se donne  $\varepsilon_i, \gamma_i$ , on a identiquement  $\frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial z \partial y}$ ; on aura donc

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ - \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} \right].$$

On trouverait de même les autres relations, qui sont :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} \right], \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial z \partial x} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right.$$

Le problème de Barré de Saint-Venant est donc complètement résolu dans le cas des déformations infiniment petites.

Que devient ce problème dans le cas des déformations finies ?

Il est évident *a priori* que six fonctions quelconques  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$  ne peuvent pas être non plus choisies arbitrairement pour définir la déformation d'un milieu. Mais quelles relations faut-il établir entre ces six fonctions pour qu'elles correspondent à une déformation ? Les efforts tentés sur le système différentiel qui les définit n'ont jamais été menés jusqu'au bout.

En 1896, MM. E. et F. Cosserat<sup>(1)</sup> reprirent l'étude de la déformation générale d'un milieu en partant de l'idée de Cauchy ; ils rattachèrent les équations générales de la déformation à la théorie des coordonnées curvilignes. Cette méthode leur a permis d'utiliser les résultats de Lamé, de Bonnet, de M. Lipschitz et de M. Darboux, et d'énoncer des résultats qui généralisent les théorèmes trouvés pour les déformations infiniment petites. Employant systématiquement les propriétés du trièdre de référence mobile de M. Darboux, ils indiquent (page 91 de leur mémoire) comment on pourrait, par un

<sup>(1)</sup> E. et F. COSSERAT, *Mémoire sur la théorie de l'élasticité* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. X, 1896).

choix particulier du trièdre mobile, arriver à obtenir les relations liant les  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$ , en éliminant « les rotations et les translations entre 27 relations dont 9 sont finies et les 18 autres différentielles.

Le problème analytique de Barré de Saint-Venant restait donc entièrement à résoudre dans le cas des déformations finies. Le caractère des démonstrations données pour le cas des déformations infiniment petites montrait clairement que la méthode employée n'était pas générale. Le succès de ces démonstrations était visiblement lié à la forme linéaire du système différentiel qui, dans le cas des déformations infiniment petites, définit les  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$ .

Dans le cas des déformations finies, le système d'équations aux dérivées partielles définissant les  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$  n'est plus linéaire; c'est ce qui explique l'échec des efforts tentés pour le résoudre par des procédés analogues à ceux qui avaient réussi dans le cas des déformations infiniment petites.

Dans ce travail, nous nous sommes proposé de résoudre complètement ce problème et d'indiquer une méthode générale s'appliquant à la fois aux déformations finies et aux déformations infiniment petites. L'idée de la méthode consiste à transformer le système différentiel définissant les  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$  en un autre système équivalent au premier, mais appartenant à une catégorie qui a été l'objet d'une étude complète de la part de M. Riquier (1).

Nous donnerons au chapitre suivant les définitions et les énoncés, extraits du mémoire de M. Riquier, qui sont indispensables pour l'intelligence de ce travail.

Dans le tableau suivant, nous donnons les notations employées par divers auteurs pour désigner ce que nous appelons aujourd'hui  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ .

Cauchy étant le seul auteur qui ait rapporté la déformation au milieu déformé, nous ne pouvons pas établir de correspondance de notations entre lui et les différents auteurs qui ont traité le problème après lui, et qui tous ont rapporté la déformation au milieu non déformé.

Green, Thomson, de Saint-Venant, Boussinesq, Beltrami, MM. Cosserat, ont désigné par  $x$ ,  $y$ ,  $z$  les coordonnées du point dans le milieu

(1) Ch. RIQUIER, *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (Acta Mathematica, t. XXIII, 1900.)

non déformé, par  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  les composantes de l'écart, et la correspondance de leurs notations est la suivante :

NOTATIONS des	MM. COSSERAT	BELTRAMI	BOUSSINESQ	DE SI-VENANT	THOMSON	GREEN
Dilatations. . .	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	$\alpha, \beta, \gamma$	$\partial_x, \partial_y, \partial_z$	$S_x, S_y, S_z$	$\frac{A-1}{2}, \frac{B-1}{2}$	$\frac{a^2-1}{2}, \frac{b^2-1}{2}$
					$\frac{C-1}{2}$	$\frac{c^2-1}{2}$
Glissements. . .	$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$	$\lambda, \mu, \nu$	$g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$	$\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$	$a, b, c$	$\alpha', \beta', \gamma'$

En terminant, je désire exprimer à M. Duhem toute la reconnaissance que je lui dois pour l'intérêt qu'il a bien voulu montrer à ce travail et les bienveillants conseils qu'il n'a cessé de me donner.

Je prie enfin M. Féraud d'accepter mes remerciements les plus sincères pour les heureuses simplifications qu'il a bien voulu m'indiquer en examinant ce travail.

## CHAPITRE II

**Les systèmes différentiels orthoïques et orthonomes.  
Résumé des Recherches de M. Riquier <sup>(1)</sup>.**

I. — *Définition des dérivées cardinales.*

Considérons une fonction olotrope quelconque  $F(x, y, \dots)$  et deux dérivées partielles distinctes de cette fonction. A chacune de ces dérivées, adjoignons par la pensée la suite indéfinie de ses dérivées partielles de tous ordres; nous obtiendrons ainsi deux groupes illimités. Tout terme commun à ces deux groupes se nommera une *résultante* des deux dérivées considérées.

Considérons maintenant un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées partielles des fonctions inconnues qu'il implique et, dans ce système, considérons deux équations ayant pour premiers membres deux dérivées partielles d'une même fonction inconnue. Prenons la *résultante d'ordre minimum* de ces deux dérivées, et répétons l'opération en faisant varier de toutes les manières possibles le choix de la fonction inconnue et celui des deux équations sur les premiers membres desquels on doit opérer; les résultantes d'ordre minimum, ainsi obtenues en nombre limité, se nomment les *dérivées cardinales* de ces diverses fonctions inconnues.

II. — *Définition des cotes <sup>(2)</sup>.*

Soient :  $x, y, \dots$  des variables indépendantes.

$u, v, \dots$  des fonctions de  $x, y, \dots$

(<sup>1</sup>) CH. RIQUIER, *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta mathematica*, t. XXIII, pp. 203 et suiv.; 1900).

(<sup>2</sup>) RIQUIER, *Acta mathematica*, t. XXIII: p. 231; 1900.

A chacune des quantités  $x, y, \dots; u, v, \dots$ , faisons comprendre  $p$  entiers, positifs, nuls ou négatifs quelconques que nous appellerons *cote première, cote deuxième, cote  $p^{\text{ième}}$*  de cette quantité. Les cotes sont en outre assujetties à cette condition, que la cote première de toute variable indépendante soit positive et au moins égale à 1.

Considérons ensuite une dérivée quelconque de l'une des fonctions  $u, v, \dots$ . On appelle cote  $q^{\text{ième}}$  ( $q = 1, 2, 3 \dots p$ ) de la dérivée, l'entier obtenu en ajoutant à la cote  $q^{\text{ième}}$  de la fonction, les cotes  $q^{\text{ièmes}}$  de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non.

Considérons par la pensée l'ensemble formé par les fonctions  $u, v, \dots$  et leurs dérivées de tous ordres. Dans cet ensemble, considérons une quantité quelconque  $\mathfrak{z}$  et une autre  $\mathfrak{z}'$ . Désignons par  $c_1, c_2, \dots, c_p$ , les cotes 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>,  $p^{\text{ième}}$  de la quantité  $\mathfrak{z}$ ; par  $c'_1, c'_2, \dots, c'_p$  les cotes 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup>,  $p^{\text{ième}}$ , de la quantité  $\mathfrak{z}$ ; puis formons les différences

$$c_1 - c'_1, c_2 - c'_2, \dots, c_p - c'_p.$$

Cela étant, nous dirons que la quantité  $\mathfrak{z}'$  est *Normale* vis-à-vis de la quantité  $\mathfrak{z}$ , si les différences

$$c'_p$$

satisfont aux conditions suivantes :

- 1° Ces différences ne sont pas toutes nulles;
- 2° La 1<sup>re</sup> de ces différences qui n'est pas nulle est positive.

Lorsque ces deux conditions ne seront pas simultanément remplies, nous dirons que la quantité  $\mathfrak{z}'$  est *Anormale* vis-à-vis de la quantité  $\mathfrak{z}$ .

Les deux propositions suivantes sont évidentes :

- 1° Suivant que  $\mathfrak{z}'$  est Normale ou Anormale vis-à-vis de  $\mathfrak{z}$ , la dérivée  $\frac{\partial^{a+b+\dots} \mathfrak{z}'}{\partial x^a \partial y^b \dots}$  est Normale ou Anormale vis-à-vis de la dérivée  $\frac{\partial^{a+b+\dots} \mathfrak{z}}{\partial x^a \partial y^b \dots}$ .

- 2° Si  $\mathfrak{z}'$  est Normale vis-à-vis de  $\mathfrak{z}'$  et celle-ci Normale vis-à-vis de  $\mathfrak{z}$ , la quantité  $\mathfrak{z}'$  est normale vis-à-vis de  $\mathfrak{z}$ .

### III. — Les dérivées principales et les dérivées paramétriques <sup>(1)</sup>.

Supposons que les quantités  $x, y, \dots; u, v, \dots$  soient affectées chacune de  $p$  cotes. Tout ensemble illimité formé avec certaines dérivées de  $u, v, \dots$  peut se partager, suivant une loi bien déterminée, en ensembles limités satisfaisant à la condition suivante : Si l'on considère deux dérivées d'une même fonction appartenant à l'ensemble illimité, l'une d'elles est *Normale* ou *Anormale* vis-à-vis de l'autre suivant que l'ensemble où elle figure précède ou non l'ensemble où cette autre se trouve.

Considérons les cotes premières des diverses fonctions  $u, v, \dots$  et désignons par  $\varphi$  la plus petite d'entre elles. Toute dérivée d'ordre  $n$  de  $u, v, \dots$  aura alors pour cote au moins  $n + \varphi$ , puisque la cote première de toute variable indépendante est au moins égale à 1. Il résulte de là :

1° Que la cote première d'une dérivée d'ordre quelconque ne tombera jamais au-dessous de  $1 + \varphi$  ;

2° Que si l'on désigne par  $c$  un nombre au moins égal à  $1 + \varphi$ , le nombre des dérivées possédant une cote première égale à  $c$  est essentiellement limité.

Cela posé, on partagera d'abord les dérivées de l'ensemble illimité en ensembles tels que toutes les dérivées d'un même ensemble aient même cote première et que cette cote croisse d'un ensemble au suivant. Chaque ensemble ainsi obtenu sera, s'il y a lieu, partagé en ensembles partiels successifs, chaque ensemble partiel correspondant à la même cote seconde des dérivées qui le composent et cette cote croissant d'un ensemble partiel au suivant; puis chacun de ces ensembles partiels pourra, à son tour, être partagé en ensembles partiels du second ordre par la considération des cotes troisièmes de ses termes. On continuera ainsi jusqu'à l'épuisement des  $p$  cotes. L'ensemble illimité se trouvera partagé finalement en ensembles limités se succédant suivant une certaine loi, et l'on voit immédiatement que, par rapport à une dérivée quelconque figurant dans l'ensemble

(1) RIQUIER, *Acta mathematica*, t. XXIII, p. 233; 1900.



partiel de rang  $N$ , les dérivées figurant dans les ensembles partiels de rang  $1, 2, \dots, N - 1$ , sont toutes *Normales*, tandis que, par rapport à la même dérivée, les dérivées figurant dans les ensembles partiels de rang  $N, N + 1, \dots$  sont toutes *Anormales*.

Supposons maintenant que l'on se donne un ensemble limité  $E_{u,v,\dots}$  formé avec des dérivées de  $u, v, \dots$ . On dit qu'une dérivée quelconque de  $u, v, \dots$  est *principale* relativement à cet ensemble, si elle appartient à l'ensemble limité par  $E_{u,v,\dots}$  et toutes ses dérivées.

Lorsqu'elle n'est pas principale, on dit qu'elle est *paramétrique*.

#### IV. — Définition des systèmes orthoïques (<sup>1</sup>).

Considérons maintenant un système différentiel où se trouvent engagées les fonctions inconnues  $u, v, \dots$  des variables indépendantes  $x, y, \dots$ . Attribuons  $p$  cotes à chacune des diverses quantités. Le système proposé sera dit *orthoïque*, si, moyennant un choix convenable du nombre  $p$  et des cotes attribuées à  $x, y, \dots; u, v, \dots$ , il remplit à la fois les deux conditions suivantes :

1° Le système en question se trouve résolu par rapport à certaines dérivées qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres.

Ces seconds membres, si l'on y considère pour un instant  $x, y, \dots, u, v, \dots$  et les diverses dérivées de  $u, v, \dots$  qui y figurent comme autant de variables indépendantes distinctes, sont tous développables dans un même domaine.

2° Chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) qui soient normales par rapport au premier membre correspondant.

THÉORÈME (<sup>2</sup>). — Si un système orthoïque possède un groupe d'intégrales ordinaires, les développements de ces intégrales par la formule de Taylor peuvent être reconstruits dès que l'on connaît les déterminations initiales de ces intégrales.

(<sup>1</sup>) RIQUIER, *loc. cit.*, p. 234.

(<sup>2</sup>) RIQUIER, *loc. cit.*, p. 237.

## V. — *Le problème inverse et les relations primitives* <sup>(1)</sup>.

Cherchons si, dans un système orthoïque, il existe un groupe d'intégrales répondant à des conditions initiales données. Avant de répondre à la question, donnons la définition des *relations primitives*.

Nous nommerons relations primitives, toutes celles qui font partie du système ou qui s'en déduisent par de simples différentiations. D'après cela, toute *dérivée principale* figure au moins une fois dans le premier membre des relations primitives, alors que les *dérivées paramétriques* n'y figurent jamais.

Cette définition donnée <sup>(2)</sup> :

1° Pour qu'un système orthoïque admette quelque groupe d'intégrales ordinaires répondant à une détermination initiale donnée, il est tout d'abord *nécessaire* que les relations primitives s'accordent à fournir à chacune de leurs dérivées principales une seule et même valeur initiale.

2° La concordance numérique des relations primitives étant supposée, la convergence des développements des intégrales hypothétiques correspondant aux données initiales choisies est encore une condition nécessaire à l'existence de ces intégrales.

Il suffit pour s'en convaincre de se reporter à la définition même des *intégrales ordinaires* <sup>(3)</sup>.

3° Si, pour un choix déterminé des conditions initiales, les relations primitives s'accordent numériquement et qu'en outre les développements des intégrales hypothétiques soient convergents, les sommes de ces développements constituent des intégrales ordinaires du système orthoïque donné.

4° Il ne peut y avoir plus d'un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données.

(1) RQUIER, *loc. cit.*, p. 237.

(2) RQUIER, *loc. cit.*, p. 239.

(3) RQUIER, *loc. cit.*, p. 234, §

# VI. — *Les systèmes orthoïques complètement intégrables* <sup>(1)</sup>.

On dit qu'un système orthoïque est complètement intégrable s'il admet un groupe (nécessairement unique) d'intégrales ordinaires répondant à des données initiales arbitrairement choisies.

# VII. — *Les systèmes orthoïques passifs* <sup>(1)</sup>.

On dit qu'un système orthoïque est *passif* si la concordance des relations primitives a lieu *pour toutes les données initiales possibles*.

# VIII. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système orthoïque soit complètement intégrable* <sup>(1)</sup>.

On démontre que les conditions *nécessaires et suffisantes* pour qu'un système orthoïque soit complètement intégrable sont :

1° La passivité ;

2° La convergence des développements construits *a priori* d'intégrales hypothétiques répondant à des données initiales quelconques.

# IX. — *Condition de passivité* <sup>(2)</sup>.

On démontre que, pour qu'un système orthoïque soit passif, il faut et il suffit que les *diverses expressions ultimes* d'une même dérivée cardinale quelconque soient égales identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs attribuées aux variables, aux fonctions inconnues et à celles d'entre leurs dérivées paramétriques qui figurent dans le système, ces trois sortes de quantités étant considérées, pour un instant, comme autant de variables indépendantes distinctes.

<sup>(1)</sup> RIQUIER, *loc. cit.*, p. 241 et suiv.

<sup>(2)</sup> RIQUIER, *loc. cit.*, p. 243 et suiv.

X. — *Condition de convergence des développements* <sup>(1)</sup>.

Il ne suffit pas, pour qu'un système orthoïque soit complètement intégrable, qu'il *soit passif*. Il faut encore que les développements construits *a priori* des intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données *soient convergents* pour que ces intégrales *existent effectivement*. Or, cette convergence n'a pas nécessairement lieu. L'exemple suivant, trouvé par Sophie de Kowaleski, fera mieux comprendre la pensée de M. Riquier.

Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

où  $u$  désigne une fonction des deux variables indépendantes  $x$  et  $y$ . Cette équation constitue un système orthoïque, comme on le voit, en attribuant à  $u$  la cote zéro, à  $x$  la cote 3, et à  $y$  la cote 1. D'ailleurs un pareil système est nécessairement passif, puisqu'il est composé d'une seule équation. Enfin, les dérivées paramétriques de  $u$  sont celles qui se rapportent à la seule variable  $y$ , de sorte qu'une intégrale hypothétique se trouve entièrement déterminée par la condition de se réduire à une fonction de  $y$  pour  $x = x_0$ .

On démontre <sup>(2)</sup> alors qu'en choisissant convenablement  $\varphi(y)$ , on tombe sur un développement divergent.

XI. — *Les systèmes orthonomes* <sup>(3)</sup>.

Un système orthoïque sera dit *orthonome* dans le cas particulièrement remarquable où les *cotes premières des diverses variables indépendantes* se trouvent être toutes égales à un même entier (positif).

On démontre <sup>(4)</sup> que tout système orthonome passif est complète-

<sup>(1)</sup> RIQUIER, *loc. cit.*, p. 251 et suiv.

<sup>(2)</sup> RIQUIER, *loc. cit.*, p. 252.

<sup>(3)</sup> RIQUIER, *loc. cit.*, p. 259.

<sup>(4)</sup> RIQUIER, *loc. cit.*, p. 263 et suiv.

ment intégrable, c'est-à-dire admet un groupe (unique) d'intégrales ordinaires répondant à des données initiales arbitrairement choisies.

On démontre<sup>(1)</sup>, en effet, que, dans les systèmes orthonomes, la convergence des développements des intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données *est toujours assurée*.

Donc, pour qu'un système orthonome soit complètement intégrable, il faut et il suffit qu'il soit *passif*.

Un système orthonome non passif n'est pas forcément privé d'intégrales : seulement il n'admet pas d'intégrales correspondant à des déterminations initiales arbitrairement choisies, et l'on ne sait alors comment ces dernières doivent être choisies pour que les intégrales correspondantes existent ; il peut même arriver que les intégrales correspondantes n'existent jamais<sup>(2)</sup>.

(<sup>1</sup>) Riquier, *loc. cit.*, p. 263 et suiv.

(<sup>2</sup>) Extrait d'une lettre de M. Riquier à l'auteur.

## CHAPITRE III

### Le problème de Barré de Saint-Venant.

#### § 1<sup>er</sup>. — *Déformation générale d'un milieu continu.*

Imaginons un milieu continu et soit, à l'instant  $t_0$ , une surface  $S_0$ , limitant une région quelconque  $E_0$  de ce milieu. Supposons maintenant que les divers éléments constituant ce milieu éprouvent une modification telle qu'à un instant  $t$ , postérieur à  $t_0$ , tous ceux qui étaient compris à l'intérieur de  $S_0$  se trouvent compris à l'intérieur d'une surface  $S$ , limitant une région  $E$ .

Appelons  $a, b, c$  les coordonnées d'un point quelconque d'un élément de volume  $dv_0$  de la région  $E_0$ ;  $x, y, z$ , celles du point correspondant de la région  $E$  dans le milieu modifié.

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}x &= a + u(a, b, c), \\y &= b + v(a, b, c), \\z &= c + w(a, b, c).\end{aligned}$$

Nous supposerons que  $u, v, w$  sont trois fonctions finies, continues, uniformes; qu'elles admettent des dérivées premières et secondes jouissant des mêmes propriétés pour tous les points  $(a, b, c)$  du milieu; enfin qu'elles admettent des dérivées troisièmes.

Nous dirons que la modification a fait subir au milieu une *déformation*, si nous ne pouvons pas transformer la région  $E_0$  en la région  $E$  en la transportant tout d'une pièce à la façon d'un corps solide.

Dans le cas où nous pourrions amener  $E_0$  à coïncider avec  $E$  par un transport d'ensemble, nous dirons que le milieu a subi un simple *déplacement*.

Cela posé, considérons dans le milieu initial deux points matériels infiniment voisins,  $\mu$  et  $\mu'$ .

$\mu$  ayant pour coordonnées  $a, b, c$ .

$\mu'$  ayant pour coordonnées  $a', b', c'$ .

Dans le milieu déformé, ces points matériels  $\mu$  et  $\mu'$  occupent des positions  $M$  et  $M'$ , dont les coordonnées sont  $x, y, z$  pour le point  $M$  et  $x', y', z'$  pour le point  $M'$ .

Les différences  $a' - a, b' - b, c' - c$  sont infiniment petites; il en est de même des différences  $x' - x, y' - y, z' - z$ . Si nous négligeons les infiniment petits du second ordre, nous aurons

$$(2) \quad \begin{cases} x' - x = \frac{\partial x}{\partial a}(a' - a) + \frac{\partial x}{\partial b}(b' - b) + \frac{\partial x}{\partial c}(c' - c), \\ y' - y = \frac{\partial y}{\partial a}(a' - a) + \frac{\partial y}{\partial b}(b' - b) + \frac{\partial y}{\partial c}(c' - c), \\ z' - z = \frac{\partial z}{\partial a}(a' - a) + \frac{\partial z}{\partial b}(b' - b) + \frac{\partial z}{\partial c}(c' - c). \end{cases}$$

Moyennant les égalités (1), ces relations peuvent s'écrire :

$$(3) \quad \begin{cases} x' - x = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right)(a' - a) + \frac{\partial u}{\partial b}(b' - b) + \frac{\partial u}{\partial c}(c' - c), \\ y' - y = \frac{\partial v}{\partial a}(a' - a) + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right)(b' - b) + \frac{\partial v}{\partial c}(c' - c), \\ z' - z = \frac{\partial w}{\partial a}(a' - a) + \frac{\partial w}{\partial b}(b' - b) + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right)(c' - c). \end{cases}$$

Le déterminant des quantités  $a' - a, b' - b, c' - c$ , est :

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial u}{\partial b} & \frac{\partial u}{\partial c} \\ \frac{\partial v}{\partial a} & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial v}{\partial c} \\ \frac{\partial w}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial b} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}$$

Nous montrerons au paragraphe 5, chapitre III, que  $\mathfrak{D}$  est toujours différent de zéro, si on reste dans le domaine du problème physique,

qui est d'ailleurs le seul intéressant. Le changement de variables défini par les formules (3) est donc bien déterminé.

Considérons maintenant, dans l'espace des  $x', y', z'$ , une sphère de rayon 1, ayant pour centre le point  $x, y, z$ . L'équation de cette sphère est

$$(4) \quad (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = 1.$$

Cherchons à quelle surface elle correspond dans l'espace des  $a', b', c'$ . Pour cela, il nous suffit de remplacer, dans l'équation (4),  $x' - x, y' - y, z' - z$  par leurs valeurs tirées des formules (3). Il est facile de voir que notre sphère se transforme en l'ellipsoïde

$$(5) \quad (1 + 2\varepsilon_1)(a' - a)^2 + (1 + 2\varepsilon_2)(b' - b)^2 + (1 + 2\varepsilon_3)(c' - c)^2 + 2\gamma_1(b' - b)(c' - c) + 2\gamma_2(c' - c)(a' - a) + 2\gamma_3(a' - a)(b' - b) = 1,$$

où  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  désignent les quantités suivantes :

$$(6) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial a} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial b} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial c} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial c} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial c} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial c} \right)^2 \right], \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} \gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial v}{\partial b} \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial w}{\partial c}, \\ \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial c} \frac{\partial w}{\partial a}, \\ \gamma_3 = \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial w}{\partial b}. \end{cases}$$

Nous avons vu au chapitre I, § 1<sup>er</sup>, que ces six quantités étaient nécessaires et suffisantes pour définir complètement la déformation la plus générale d'un milieu continu. Nous avons vu également que si on supposait la déformation infiniment petite, ces quantités se réduisaient à :

$$(8) \quad \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial a}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial b}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial c},$$

$$(9) \quad \gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial c}, \quad \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial a}, \quad \gamma_3 = \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b}.$$



§ 2. — *Intégration du système différentiel définissant les  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$  lorsque les déformations sont infiniment petites.*

Inversement, on peut se proposer de traiter le problème suivant :

Étant données six fonctions  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , peut-on leur faire correspondre trois fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , qui vérifient le système (6) et (7)?

La solution de ce problème s'obtient, comme on sait, en intégrant le système défini par les relations (6) et (7). Mais nous devons nous poser avant la question suivante :

« Quelles doivent être les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système différentiel (6) et (7) admette un groupe d'intégrales  $u$ ,  $v$ ,  $w$  le vérifiant; ou, ce qui revient au même, quelles relations doit-il exister entre les six fonctions  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  pour que le système différentiel (6) et (7) soit complètement intégrable? »

Cette question est identique à celle que Barré de Saint-Venant s'était proposé de résoudre en 1864 pour les déformations infiniment petites. Nous avons vu, en effet, chapitre I<sup>er</sup>, § 2, que Barré de Saint-Venant s'était proposé de résoudre le problème suivant :

« Peut-on choisir arbitrairement les six fonctions  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  qui définissent une déformation? »

Bien que le problème que nous nous proposons de traiter soit beaucoup plus général, puisqu'il se rapporte aux déformations finies, nous ne lui en conserverons pas moins le nom de problème de Barré de Saint-Venant que lui a donné Beltrami<sup>(1)</sup>.

Pour faire comprendre l'esprit de la méthode que nous allons employer, nous en ferons tout d'abord l'application aux déformations infiniment petites.

Nous avons vu que dans le cas des déformations infiniment petites, le système différentiel (6), (7) se réduisait au système (8), (9). Proposons-nous donc de chercher quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système différentiel défini par les formules (8) et (9) admette un groupe (unique) d'intégrales  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

(1) BELTRAMI, *Noti Fisico-Matematiche* (Rendiconti del Circolo Matematica di Palermo, t. III, p. 79; 1889).

Pour cela, transformons le système

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial a} = \varepsilon_1, \quad \frac{\partial v}{\partial b} = \varepsilon_2, \quad \frac{\partial w}{\partial c} = \varepsilon_3,$$

$$(9) \quad \frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial c} = \gamma_1, \quad \frac{\partial w}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial c} = \gamma_2, \quad \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b} = \gamma_3$$

de la façon suivante :

Différentions les équations du groupe (9), la première par rapport à  $a$ , la deuxième par rapport à  $b$ , la troisième par rapport à  $c$ . Nous aurons

$$(10) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial a} + \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial a} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial a}$$

$$(11) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial b} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial b}$$

$$(12) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial c} + \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial c}$$

Ajoutons (11) et (12) membre à membre ; nous aurons :

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} + \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial c} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c};$$

mais en vertu de (10), cette égalité deviendra

$$(13) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right].$$

Par un calcul analogue, on voit qu'on trouverait les deux autres relations suivantes :

$$(14) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial a} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} \right],$$

$$(15) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial a} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right].$$

Différentions maintenant les équations du deuxième groupe, premièrement par rapport à  $b$ ,  $c$ ,  $a$ , et deuxièmement, par rapport à  $c$ ,  $a$ ,  $b$ . Nous aurons

$$(16) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial b} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial b}$$

$$(19) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial c} + \frac{\partial^2 v}{\partial c^2} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial c}$$

$$(17) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial b}$$

$$(20) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial a}$$

$$(18) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial a} + \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial a}$$

$$(21) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial b}$$

Si maintenant nous différencions le groupe (8) d'abord par rapport à  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , puis par rapport à  $c$ ,  $a$ ,  $b$ , et enfin par rapport à  $b$ ,  $c$ ,  $a$ , nous obtiendrons les relations suivantes :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a}, & \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b}, & \frac{\partial^2 w}{\partial c^2} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial c}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial c} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c}, & \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial a} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a}, & \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial b} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial b}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b}, & \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c}, & \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial a} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a}. \end{array} \right.$$

Les relations (16) à (21) vont alors pouvoir s'écrire :

$$(23) \quad \begin{array}{lll} \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c}, & \frac{\partial^2 v}{\partial c^2} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial c} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial b}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial c} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a}, & \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b}, & \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a}. \end{array}$$

Les relations (13), (14), (15), (22), (23) nous permettent de trans-

former le système proposé en un système différentiel équivalent qui est formé par le groupe suivant :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a}, & \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b}, & \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial b} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right], \\ \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial c} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c}, & \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial c} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a}, \end{array} \right.$$

et par deux groupes analogues, où les fonctions  $v$  et  $w$  remplacent la fonction  $u$ ; ces deux derniers groupes, qu'il est facile de tirer du groupe (24) par des permutations tournantes, nous les appellerons (24<sup>bis</sup>) et (24<sup>ter</sup>).

Sous cette forme, nous voyons que nous avons affaire à un système *orthonome* très simple.

En effet : 1° Ce système se trouve résolu par rapport à certaines dérivées qui ne figurent non plus que leurs propres dérivées dans aucun des seconds membres ;

2° On peut choisir pour cote première des fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$  un nombre entier quelconque, et l'on peut, en outre, choisir pour cote première des variables indépendantes un même nombre entier positif.

Dans ces conditions, on voit que les seconds membres de ces équations ne contiennent que des quantités qui sont *normales* par rapport à celles qui figurent au premier membre. Alors, en vertu du théorème énoncé au chapitre II, § 2, pour que le système défini par les relations (24), (24<sup>bis</sup>), (24<sup>ter</sup>) qui équivaut au système (8), (9) admette un groupe unique d'intégrales, il faut et il suffit que ce système vérifie la condition de *passivité*.

Écrivons donc que les diverses expressions ultimes d'une même *dérivée cardinale* quelconque sont égales identiquement, quelles que soient les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Dans le système (24), relatif à la fonction  $u$ , les dérivées cardinales sont :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial a^3 \partial b}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial c}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial a \cdot \partial b \partial c}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial a \partial b^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial b^2 \partial c}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial a \partial c^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial c^2 \partial b}.$$

L'identité des expressions ultimes nous donne les relations suivantes :

La relation qui correspond à la dérivée cardinale  $\frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial b}$  est :

$$(25) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b \partial a}.$$

Celle qui correspond à la dérivée cardinale  $\frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial c}$  est :

$$(26) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial a \partial c} = \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial c \partial a}.$$

Celles qui correspondent à la dérivée cardinale  $\frac{\partial^3 u}{\partial a \partial b \partial c}$  sont :

$$(27) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b \partial c} = \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial c \partial b}$$

$$(28) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b \partial c} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} + \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right]$$

et une relation (28<sup>bis</sup>) identique à (28).

Celle qui correspond à la dérivée cardinale  $\frac{\partial^3 u}{\partial a \partial b^2}$  est :

$$(29) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial b \partial a}.$$

Celle qui correspond à la dérivée cardinale  $\frac{\partial^3 u}{\partial b^2 \partial c}$  est :

$$(30) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial a \partial c} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial b} \left[ \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} \right].$$

Celle qui correspond à la dérivée cardinale  $\frac{\partial^3 u}{\partial a \partial c^2}$  est :

$$(31) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial c^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial a \partial c}.$$

Enfin, celle qui correspond à la dérivée cardinale  $\frac{\partial^3 u}{\partial c^2 \partial b}$  est :

$$(32) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial a \partial b} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c} \left[ \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right].$$

Par un calcul analogue, on verrait que, dans le système (24<sup>bis</sup>), la concordance des diverses expressions ultimes d'une même dérivée cardinale quelconque, relative à la fonction  $v$ , entraîne des conditions déjà trouvées pour la fonction  $u$ , sauf la condition nouvelle

$$(33) \quad \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial c \partial b} = \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial c^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial b^2}$$

qui remplace la condition (31).

Enfin un calcul analogue fait pour la fonction  $w$ , montre que la concordance des diverses expressions ultimes d'une même dérivée cardinale quelconque relative à cette fonction, entraîne des conditions déjà trouvées pour  $u$  et  $v$ .

Si l'on remarque que les conditions (25), (26), (27) sont identiquement vérifiées, et si l'on réunit les résultats obtenus, on voit que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des trois fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , sont les suivantes :

$$(34) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial c^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial b^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial b \partial c} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial c^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial a \partial c} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial a^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial a \partial b} \end{aligned} \right\} \quad (35) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b \partial c} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right], \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial a \partial c} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial b} \left[ \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} \right], \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial a \partial b} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c} \left[ \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ce sont ces relations qui ont été trouvées pour la première fois, en 1864, par Barré de Saint-Venant<sup>(1)</sup>.

Cela posé, imaginons que nous ayons trouvé un système de valeurs  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$ , vérifiant les systèmes (34), (35). A ce système correspondra un groupe (unique) d'intégrales  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , définies par les systèmes (24), (24<sup>bis</sup>), (24<sup>ter</sup>), répondant à des données initiales arbitrairement choisies. L'intégration de ces systèmes montre d'ailleurs immédiatement que si l'on désigne par  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , un système du groupe, tout nouveau système se déduira du précédent en ajoutant à chacune des fonctions

(1) Voir chap. I, § 2.

$u, v, w$  une fonction linéaire de  $a, b, c$ . D'ailleurs, ces fonctions linéaires ne sont pas quelconques. Posons :

$$(36) \quad \begin{cases} u' = u + A_1 a + B_1 b + C_1 c + D_1, \\ v' = v + A_2 a + B_2 b + C_2 c + D_2, \\ w' = w + A_3 a + B_3 b + C_3 c + D_3, \end{cases}$$

$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ , étant 12 constantes, nous allons montrer que ces 12 constantes ne sont pas toutes distinctes; elles vont se réduire à 6.

Écrivons, en effet, que les fonctions  $u', v', w$ , données par les relations (36), vérifient le système (8), (9) déjà vérifié par les fonctions  $u, v, w$ . Nous verrons que l'on doit avoir :

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, & B_2 &= 0, & C_3 &= 0, \\ B_3 + C_2 &= 0, & B_1 + A_2 &= 0, & C_1 + A_3 &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$B_3 = -C_2, \quad A_3 = -C_1, \quad A_2 = -B_1.$$

Les formules (36) deviennent alors :

$$(37) \quad \begin{cases} u' = u + C_1 c - A_2 b + D_1, \\ v' = v + A_3 a - B_3 c + D_2, \\ w' = w + B_3 b - C_1 c + D_3. \end{cases}$$

Sous cette forme, on voit qu'une intégrale quelconque du système (8), (9) étant donnée, toute autre intégrale s'en déduit en superposant à la déformation que représente cette intégrale un déplacement d'ensemble infinitésimal du milieu.

### § 3. — *Le problème de Barré de Saint-Venant dans le cas des déformations finies.*

Reprenons maintenant les équations générales (6) et (7) et proposons-nous de chercher quelles sont les conditions nécessaires et suffi-

santes pour que le système différentiel qu'elles définissent admette un groupe (unique) d'intégrales  $u, v, w$ .

Pour cela, transformons le système de la façon suivante :

Différentions la première des équations (7) par rapport à  $a$ , la deuxième par rapport à  $b$ , la troisième par rapport à  $c$ . Nous aurons :

$$(45) \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} = \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial a} + \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial a} \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial a} \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial a} + \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial a} \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial v}{\partial b} \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial a} + \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial a} \frac{\partial w}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial a}$$

$$(46) \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} = \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial b} - \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial b} \frac{\partial u}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial b} \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial b} \frac{\partial w}{\partial a} - \frac{\partial w}{\partial c} \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b}$$

$$(47) \quad \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} = \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial c} - \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} \\ - \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial c} \frac{\partial u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} - \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial c} \frac{\partial v}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} - \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial c} \frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial c}$$

Ajoutons (46) et (47); nous trouvons

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} = \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial c} \\ + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} \frac{\partial u}{\partial a} - \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} \frac{\partial v}{\partial a} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial c} \frac{\partial w}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} \\ - \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial c} \frac{\partial u}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial c} \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c} \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial c} \frac{\partial w}{\partial b}$$

Ce qui peut s'écrire, en tenant compte de (45),

$$(48) \quad \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} - \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} - \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial c} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right).$$



Différentions maintenant la deuxième des équations (6) par rapport à  $c$ , et la troisième par rapport à  $b$ ; nous aurons les deux égalités :

$$(49) \quad \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial c} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c},$$

$$(50) \quad \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial c} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial b}.$$

Rapprochons les formules (48), (49) et (50); nous aurons :

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial c} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right), \\ &\frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial c} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c}, \\ &\frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial c} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial b}. \end{aligned} \right.$$

Par des calculs analogues, faits en soumettant l'ordre des différentiations à des permutations tournantes, on trouve les deux autres groupes suivants :

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial a} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial a} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial a} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c}, \\ &\frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial a} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial a} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial a} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} \right), \\ &\frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial a} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial a} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial a} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a}; \end{aligned} \right.$$

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b}, \\ &\frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a}, \\ &\frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right). \end{aligned} \right.$$

Différentions maintenant les relations (7) par rapport à  $b, c, a$ ; nous aurons :

$$(54) \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} = \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial b}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b^2} \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} + \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial v}{\partial b} \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial b} + \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} \frac{\partial w}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial b}$$

$$(55) \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial c} = \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial c}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c^2} \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial c} + \frac{\partial^2 v}{\partial c^2} \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial c} + \frac{\partial^2 w}{\partial c^2} \frac{\partial w}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial c} \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial c}$$

$$(56) \quad \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} = \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b}$$

Différentions de même les relations (6) par rapport à  $b, c, a$ ; nous aurons :

$$(57) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} + \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b},$$

$$(58) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} + \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} + \frac{\partial v}{\partial b} \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial c} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c},$$

$$(59) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial a} + \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial a} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial a} + \frac{\partial w}{\partial c} \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial a} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a}.$$

Retranchons membre à membre (57) et (56); nous aurons

$$(60) \quad \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b}$$

Retranchons membre à membre (58) et (54); nous aurons :

$$(61) \quad \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c}.$$

Enfin, retranchons membre à membre (59) et (55); nous aurons :

$$(62) \quad \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^2 v}{\partial c^2} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial c^2} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial c} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a}.$$

Si maintenant nous différencions les relations (6) respectivement par rapport à  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et par rapport à  $c$ ,  $a$ ,  $b$ , nous obtenons les égalités suivantes :

$$(63) \quad \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial^3 u}{\partial a^3} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^3 v}{\partial a^3} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^3 w}{\partial a^3} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a},$$

$$(64) \quad \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^3 u}{\partial b^3} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial^3 v}{\partial b^3} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^3 w}{\partial b^3} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b},$$

$$(65) \quad \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^3 u}{\partial c^3} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^3 v}{\partial c^3} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial c^3} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial c},$$

$$(66) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial a \partial c} + \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial c} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial c} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial c} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c},$$

$$(67) \quad \frac{\partial^3 v}{\partial b \partial a} + \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial a} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial a} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a},$$

$$(68) \quad \frac{\partial^3 w}{\partial c \partial b} + \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial b} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial b} + \frac{\partial w}{\partial c} \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial b} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial b},$$

Si nous différencions les relations (7) par rapport à  $c$ ,  $a$ ,  $b$ , et si, des résultats obtenus, nous retranchons respectivement (66), (67) et (68), nous obtenons les trois nouvelles relations suivantes :

$$(69) \quad \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 c} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c},$$

$$(70) \quad \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a},$$

$$(71) \quad \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial c^2} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial c^2} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial c} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial b}.$$

Cela fait, au moyen des relations (60), (61), (62), (63), (64), (65), (69), (70) et (71), il est facile de former les groupes suivants :

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a}, \\ \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b}, \\ \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c}; \end{array} \right.$$

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a}, \\ \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial b}, \\ \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c}; \end{array} \right.$$

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^2 v}{\partial c^2} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^2 w}{\partial c^2} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial c} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a}, \\ \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial c^2} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial c^2} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial c} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial b}, \\ \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^2 v}{\partial c^2} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial c^2} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial c}. \end{array} \right.$$

Les groupes (51), (52), (53), (72), (73), (74) nous montrent alors

que nous pouvons calculer toutes les dérivées secondes des fonctions  $u, v, w$ ; nous aurons, en effet,

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{D} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} & \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}, \\ \mathfrak{D} \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}, \\ \mathfrak{D} \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial a} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} & \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} \right) & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix} \end{aligned} \right.$$

et trois autres expressions analogues pour les dérivées

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}.$$

Ces mêmes relations (51), (52), (53), (72), (73) et (74) nous permettent d'obtenir des relations analogues pour les fonctions  $v$  et  $w$ . Nous appellerons ces relations (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>).

Examinons maintenant la forme du système (75), (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>), qui est équivalent au système (6), (7). Nous voyons que c'est un système *orthonome*. En effet :

1° Il se trouve résolu par rapport à certaines dérivées qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres;

2° On peut choisir pour cote première des fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , un même nombre entier quelconque, et pour cote première des trois variables indépendantes *un même nombre entier positif*. Si nous prenons 0, par exemple, pour cote première des fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et 1 pour cote première des variables indépendantes, nous voyons que les quantités qui figurent dans les seconds membres de nos équations sont *Normales* par rapport à celles du premier membre correspondant.

REMARQUE. — Les dérivées *paramétriques* sont ici toutes les dérivées premières des fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Alors en vertu du théorème énoncé au chapitre II, § 2, les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (75), (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>), et par suite le système (6), (7) admette un groupe (unique) d'intégrales, quelles que soient les valeurs *initiales* de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  se réduisent à la condition de *Passivité*.

Écrivons donc que les diverses expressions *ultimes* d'une même *dérivée cardinale* quelconque sont égales identiquement, quelles que soient les valeurs des variables, des fonctions inconnues et des *dérivées paramétriques* qui y figurent; ces trois sortes de quantités sont considérées, pour un instant, comme autant de variables indépendantes distinctes.

Dans le système (75), (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>), les dérivées *cardinales* relatives à la fonction  $u$  sont :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial b}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial c}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial a \partial b \partial c}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial a \partial b^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial b^2 \partial c}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial a \partial c^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial b \partial c^2}$$

On trouverait sans peine quelles sont les dérivées cardinales pour les fonctions  $v, w$ .

Si l'on voulait écrire l'identité des relations ultimes d'une même dérivée cardinalie quelconque en partant du système (75), (75<sup>bi</sup>), (75<sup>ter</sup>), le calcul deviendrait inextricable; mais il devient beaucoup plus facile si on prend les groupes (51), (52), (53), (72), (73), (74), qui ont donné naissance au système (75), (75<sup>bi</sup>), (75<sup>ter</sup>); le résultat sera d'ailleurs évidemment le même.

La dérivée cardinalie  $\frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial b}$  ne donnant lieu qu'à deux expressions différentes, nous allons les obtenir en différenciant :

1° Le groupe (72) par rapport à  $b$ , ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 & \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial a} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^3 v}{\partial a^2 \partial b} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^3 w}{\partial a^2 \partial b} \\
 &= \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial a \partial b} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \right), \\
 & \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial b} + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial b} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial a^2 \partial b} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^3 w}{\partial a^2 \partial b} \\
 (76) \quad &= \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} \right), \\
 & \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial b} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^3 v}{\partial a^2 \partial b} + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial a^2 \partial b} \\
 &= \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial c \partial b} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial b} + \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial b} + \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial b} \right);
 \end{aligned}$$

2° Le groupe (53) par rapport à  $a$ , ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 & \left| \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial a} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial a^3 \partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial^3 v}{\partial a^2 \partial b} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial^3 w}{\partial a^2 \partial b} \right. \\
 & \quad \left. = \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial a \partial b} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \right), \right. \\
 & \quad \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial b} + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial b} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial a^2 \partial b} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial^3 w}{\partial a^2 \partial b} \\
 (77) \quad & \quad \left. = \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial a^2} - \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} \right)^2 \right], \right. \\
 & \quad \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial b} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial^3 v}{\partial a^2 \partial b} + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial a^2 \partial b} \\
 & \quad \left. = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial a \partial c} \right) - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial a} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial a} + \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial a} \right). \right.
 \end{aligned}$$

Posons

$$A_1^1 = \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial a \partial b} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \right)$$

$$A_2^1 = \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} \right)$$

$$A_3^1 = \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b \partial c} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} + \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} + \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial c} \right)$$



Du groupe (76) nous tirons

$$(78) \quad \mathfrak{D} \frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial b} = \begin{vmatrix} A_1^1 & \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ A_2^1 & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ A_3^1 & \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}$$

et en posant :

$$B_2^1 = \frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial a^2} - \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} \right)^2 \right]$$

$$B_3^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial a \partial c} \right) - \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial a} + \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial a} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial a} \right]$$

nous tirerons du groupe (77)

$$(79) \quad \mathfrak{D} \frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial b} = \begin{vmatrix} A_1^1 & \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ B_2^1 & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ B_3^1 & \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}$$

Écrivons maintenant que la concordance des expressions ultimes de (78) et (79) a lieu quelles que soient les valeurs de  $a, b, c$ ,  $\frac{\partial v}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial c}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial c}$ . Pour cela, il nous faut d'abord former les *ultimes*, c'est-à-dire remplacer dans les seconds membres de (78) et (79) toutes les dérivées secondes des fonctions  $u, v, w$  qui y figurent par leurs

expressions tirées du système (75), (75<sup>bie</sup>), (75<sup>ter</sup>). Mais il est facile de voir que nous pouvons diriger le calcul de la façon suivante :

Pour que les seconds membres de (78) et (79) soient identiques, il faut et il suffit que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1^1 - A_1^1 & \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ A_2^1 - B_2^1 & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ A_3^1 - B_3^1 & \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}$$

soit identiquement nul. Si maintenant dans ce déterminant nous remplaçons les dérivées secondes de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  qui y figurent par leurs valeurs tirées du système (75), (75<sup>bie</sup>), (75<sup>ter</sup>), et si nous écrivons que  $\Delta$  est identiquement nul quelles que soient les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$   $\frac{\partial u}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial c}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial c}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial c}$ , qui y figurent, nous aurons écrit que la concordance numérique des deux expressions ultimes de la dérivée cardinale  $\frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial b}$  a lieu identiquement, quelles que soient les valeurs de ces quantités considérées pour un instant comme autant de variables distinctes.

On voit immédiatement que pour que  $\Delta$  soit identiquement nul, quelles que soient les valeurs attribuées à  $\frac{\partial v}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial c}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial c}$ , il faut et il suffit que chaque terme de la première colonne soit identiquement nul, ce qui donnera trois conditions.

Le premier terme est identiquement nul; la première condition est donc vérifiée d'elle-même. Les deux autres conditions deviennent :

$$(80) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial a \partial b} - \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} \right] = 0$$

$$(81) \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b \partial c} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right) - \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial a} + \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 v}{\partial c \partial a} \right. \\ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 w}{\partial c \partial a} - \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} - \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} - \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial c} \right] = 0$$

dans lesquelles il faut remplacer toutes les dérivées secondes des fonctions  $u, v, w$  qui y figurent par leurs valeurs tirées des systèmes (75), (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>).

Pour effectuer ce calcul, nous démontrerons tout d'abord les deux lemmes suivants :

### LEMME I.

Si on remarque que <sup>(1)</sup>

$$(82) \quad \mathfrak{D}^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

et si dans le déterminant

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ \frac{\partial u}{\partial b} & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ \frac{\partial u}{\partial c} & \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}$$

on désigne par  $U_a, U_b, U_c, V_a, V_b, V_c, \dots$ , les coefficients de  $1 + \frac{\partial u}{\partial a}, \frac{\partial u}{\partial b}, \frac{\partial u}{\partial c}, \frac{\partial v}{\partial a}, 1 + \frac{\partial v}{\partial b}, \frac{\partial v}{\partial c}, \dots$

<sup>(1)</sup> Love, *Treatise of the mathematical theory of Elasticity*, vol. I, p. 55.

On a :

$$U_a^2 + V_a^2 + W_a^2 = \frac{1 + 2\varepsilon_2}{\gamma_1} \frac{\gamma_1}{1 + 2\varepsilon_3}$$

En effet, considérons le déterminant

$$U_a = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}$$

et élevons-le au carré, on aura

$$U_a^2 = \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right)^2 & \left(\frac{\partial w}{\partial b}\right)^2 & \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial v}{\partial c} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial w}{\partial b} \\ \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial v}{\partial c} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial w}{\partial b} & \left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right)^2 \end{vmatrix}$$

ou bien si nous tenons compte de nos relations (6) et (7)

$$U_a^2 = \begin{vmatrix} (1 + 2\varepsilon_2) - \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)^2 & \gamma_1 - \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial u}{\partial c} \\ \gamma_1 - \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial u}{\partial c} & (1 + 2\varepsilon_3) - \left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)^2 \end{vmatrix}$$

Développons ce déterminant, nous aurons :

$$U_a^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_2 & \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_2 & \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial u}{\partial c} & \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)^2 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 & \gamma_1 & \left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)^2 & \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial u}{\partial c} & 1 + 2 \end{vmatrix}$$

de même nous aurons par permutations tournantes :

$$U_a^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_2 & \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial v}{\partial c} \\ \gamma_1 & \left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right)^2 & \gamma_1 \\ \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

$$W_a^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_2 & \frac{\partial w}{\partial b} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \\ \gamma_1 & \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right)^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial b}\right)^2 & \gamma_1 \\ \frac{\partial w}{\partial b} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

Ajoutons ces trois dernières relations membre à membre et tenons compte des relations (6) et (7), nous aurons :

$$(83) \quad U_a^2 + V_a^2 + W_a^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

Par permutations tournantes on déduira aisément de la relation (83)

$$(84) \quad U_b^2 + V_b^2 + W_b^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

$$U_c^2 + V_c^2 + W_c^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 \end{vmatrix}$$

## LEMME II.

Si l'on fait usage des mêmes notations que dans le lemme précédent, on a aussi :

$$U_b U_c + V_b V_c + W_b W_c = \begin{matrix} \gamma_2 & 1 + 2\varepsilon_1 \\ \gamma_4 & \gamma_3 \end{matrix}$$

En effet, nous avons :

$$U_b = - \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}; \quad U_c = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \end{vmatrix}$$

Faisons le produit de ces deux déterminants, nous aurons :

$$U_b U_c = - \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2 & \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial c} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial w}{\partial a} \\ \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial w}{\partial b} & \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial v}{\partial c} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \frac{\partial w}{\partial b} \end{vmatrix}$$

ou, en tenant compte de nos relations (6) et (7),

$$U_b U_c = - \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right)^2 & \gamma_2 - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial u}{\partial c} \\ \gamma_3 - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial u}{\partial b} & \gamma_4 - \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial u}{\partial c} \end{vmatrix}$$

Développons ce déterminant, nous aurons :

$$U_b U_c = - \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial u}{\partial c} \\ \gamma_3 & \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial u}{\partial c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right)^2 & \gamma_2 \\ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) \frac{\partial u}{\partial b} & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

De même nous aurons par permutations tournantes :

$$V_b V_c = - \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial c} \\ \gamma_3 & \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) \frac{\partial v}{\partial c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2 & \gamma_2 \\ \frac{\partial v}{\partial a} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

et

$$W_b W_c = - \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \frac{\partial w}{\partial a} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \\ \gamma_3 & \frac{\partial w}{\partial b} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2 & \gamma_2 \\ \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial w}{\partial b} & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

Ajoutons ces trois dernières relations membre à membre, nous aurons :

$$(85) \quad U_b U_c + V_b V_c + W_b W_c = - \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_2 & 1 + 2\varepsilon_1 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Par permutations tournantes on déduira aisément de la relation (85) les deux relations suivantes :

$$(86) \quad \begin{cases} U_c U_a + V_c V_a + W_c W_a = \begin{vmatrix} \gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 \end{vmatrix} \\ U_a U_b + V_a V_b + W_a W_b = \begin{vmatrix} \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \\ \gamma_3 & \gamma_2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Ces deux lemmes établis, nous allons voir que le calcul des relations (80) et (81) se fait très aisément, et que ce calcul une fois fait, on peut, par des permutations tournantes, obtenir les relations analogues se rapportant aux autres dérivées cardinales.

En effet, remarquons tout d'abord que la quantité

$$(87) \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} \right)$$

qui figure dans (80) peut s'écrire :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} \end{vmatrix}$$

au moyen des systèmes (75), (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>), remplaçons toutes les dérivées secondes qui figurent dans cette expression par leurs valeurs, pour abréger posons :

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}$$



$$N = \begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b} & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} & \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} & \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}$$

$$Q = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}$$

Notre expression deviendra

$$\frac{1}{Q^2} \begin{vmatrix} M & P \\ N & Q \end{vmatrix} + \text{etc.}$$

etc. désignant deux déterminants analogues obtenus par permutations des lettres  $v, w$ , en  $w, u$ , et en  $u, v$ . Ce déterminant peut, d'ailleurs, s'écrire en posant :

$$Ab = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} U_a + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} U_b + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) U_c$$

$$\mathfrak{U} = \left( \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} \right) U_a + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b} U_b + \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \right) U_c$$

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} U_a + \left( \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \right) U_b + \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \right) U_c$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} U_a + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} U_b + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) U_c$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \mathfrak{U} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{Q}^2 & \mathfrak{U} & \mathfrak{Q} \end{array}$$

ou bien en le développant, nous aurons pour coefficient de  $\frac{1}{\mathfrak{Q}^2}$  l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & U_a^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \end{vmatrix} + U_b^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} \end{vmatrix} \\ & + U_c^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) \end{vmatrix} \\ & + U_b U_c \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \end{vmatrix} \\ & + U_c U_a \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$U_a U_b \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \\ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \end{vmatrix} \right|$$

Il est facile de voir que les deux autres déterminants que nous avons désignés par *etc.* nous donneront des expressions analogues dans lesquelles  $U_a$ ,  $U_b$ ,  $U_c$  seront remplacés, respectivement, par  $V_a$ ,  $V_b$ ,  $V_c$ , et  $W_a$ ,  $W_b$ ,  $W_c$ . L'expression (87) pourra donc s'écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathfrak{D}^2} \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \end{vmatrix} (U_a^2 + V_a^2 + W_a^2) \right. \\ & + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} \end{vmatrix} (U_b^2 + V_b^2 + W_b^2) \\ & + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) \end{vmatrix} (U_c^2 + V_c^2 + W_c^2) \\ & + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) \end{vmatrix} (U_b U_c + V_b V_c + W_b W_c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial a} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} \end{array} \right| (U_b U_c + V_b V_c + W_b W_c) \\
 & + \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \end{array} \right| (U_c U_a + V_c V_a + W_c W_a) \\
 & + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) \end{array} \right| (U_c U_a + V_c V_a + W_c W_a) \\
 & + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} \end{array} \right| (U_a U_b + V_a V_b + W_a W_b) \\
 & + \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \end{array} \right| (U_a U_b + V_a V_b + W_a W_b) \Bigg\}
 \end{aligned}$$

Et en vertu des lemmes I et II, nous aurons finalement pour expression de la relation (80) :

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{D}^2 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial a \partial b} \right) \\
 & - \left[ (1 + 2\varepsilon_2)(1 + 2\varepsilon_3) - \gamma_1^2 \right] \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \end{vmatrix} \\
 & - \left[ (1 + 2\varepsilon_3)(1 + 2\varepsilon_1) - \gamma_2^2 \right] \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} \end{vmatrix} \\
 & - \left[ (1 + 2\varepsilon_1)(1 + 2\varepsilon_2) - \gamma_3^2 \right] \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) \end{vmatrix} \\
 & - \left[ \gamma_2 \gamma_3 - (1 + 2\varepsilon_1) \gamma_1 \right] \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) \end{vmatrix} \\
 & + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} \end{vmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \gamma_3 \gamma_1 - (1 + 2\varepsilon_3) \gamma_3 \right] \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \end{array} \right] \\
 & + \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) \end{array} \right] \\
 & - \left[ \gamma_1 \gamma_3 - (1 + 2\varepsilon_3) \gamma_3 \right] \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \\ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \end{array} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Nous allons montrer qu'on peut déduire de cette relation, et sans calculs, la relation qu'on obtiendrait après avoir dans (81) remplacé toutes les dérivées secondes qui y figurent par leurs valeurs tirées des systèmes (75), (75<sup>bia</sup>) (75<sup>ter</sup>).

En effet, cette relation peut s'écrire :

$$(89) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b \partial c} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right)$$

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} & \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial a} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} & \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial c} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial b \partial c} & \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial c} \end{array} \right] = 0$$

et il est facile de voir que la partie de cette expression qui ne dépend que des dérivées secondes de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , est absolument comparable à celle qui figure dans l'expression (80); elle n'en diffère que par la substitution des quantités  $\frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial c \partial a}$ , et leurs analogues en  $v$ ,  $w$ , aux quantités  $\frac{\partial^2 u}{\partial b^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b}$ , et leurs analogues en  $v$ ,  $w$ . De plus, il y a lieu de remarquer que  $\frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b}$  et ses analogues en  $v$ ,  $w$ , jouaient un double rôle dans l'équation (80); on ne devra donc les remplacer qu'une seule fois par  $\frac{\partial^2 u}{\partial c \partial a}$ . Ceci posé, en se reportant aux systèmes (75), (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>), ou mieux aux groupes (51), (52), (53), (72), (73), (74), qui leur ont donné naissance, on voit que tous ces changements de rôles seront obtenus à la fois si, dans les déterminants qui figurent dans l'expression (88), on remplace les éléments qui constituent la deuxième ligne  $\frac{\partial \gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial \gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c}$ , respectivement par les éléments

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_3}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right), \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c}, \quad \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial b}$$

et d'autre part les éléments

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b}, \quad \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a}, \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right)$$

respectivement par les éléments

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c}, \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} \right), \quad \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a}$$

Nous aurons donc finalement pour expression de la relation (81)

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b \partial c} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right) \right] \\
 & - \left[ (1 + 2\varepsilon_2)(1 + 2\varepsilon_3) - \gamma_1^2 \right] \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right) & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \end{array} \right| \\
 & - \left[ (1 + 2\varepsilon_3)(1 + 2\varepsilon_1) - \gamma_2^2 \right] \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} & \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} \right) \end{array} \right| \\
 & - \left[ (1 + 2\varepsilon_1)(1 + 2\varepsilon_2) - \gamma_3^2 \right] \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\ \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial b} & \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a} \end{array} \right| \\
 & - \left[ \gamma_2 \gamma_3 - (1 + 2\varepsilon_1) \gamma_1 \right] \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} & \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a} \end{array} \right| \\
 & + \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) & \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \\ \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial b} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} \right) \end{array} \right|
 \end{aligned} \right\} \quad (90)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \left[ \gamma_3 \gamma_1 - (1 + 2\varepsilon_2) \gamma_2 \right] \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \\
& \quad \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial b} \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\
& \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} \cdot \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right) & \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a} \end{array} \right. \\
& - \left[ \gamma_1 \gamma_2 - (1 + 2\varepsilon_3) \gamma_3 \right] \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \quad \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} \\
& \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right) \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} \right) \\
& \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} \\
& \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} \\
& \quad \quad \quad = 0.
\end{aligned}$$

Les relations (80) et (81) étant calculées, remarquons maintenant que la concordance des relations ultimes des sept dérivées cardinales  $\frac{\partial^3 u}{\partial a^3 \partial b}$ ,  $\frac{\partial^3 u}{\partial a^2 \partial c}$ ,  $\frac{\partial^3 u}{\partial a \partial b \partial c}$ ,  $\frac{\partial^3 u}{\partial a \partial b^2}$ ,  $\frac{\partial^3 u}{\partial b^2 \partial c}$ ,  $\frac{\partial^3 u}{\partial a \partial c^2}$ ,  $\frac{\partial^3 u}{\partial b \partial c^2}$ , nous donnera neuf déterminants analogues à  $\Delta$ . Pour chacun de ces

déterminants, nous devons évaluer à zéro les trois termes de la première colonne; un de ces termes nous donnera une condition vérifiée d'elle-même; les deux autres donneront des relations analogues à (80) et (81). Nous aurons ainsi en tout dix-huit relations, qui, d'autre part, ne sont pas toutes distinctes; le calcul montre en effet qu'elles se réduisent à six, qu'on peut déduire des expressions (80) et (81) par des permutations circulaires effectuées à la fois sur les indices des  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$  et sur les lettres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  indiquant l'ordre de différenciation de ces quantités, et de celles des fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , qui y figurent.

Le calcul complet des six équations finales pourra donc se faire aisément au moyen des relations (88) et (90) en effectuant des permutations circulaires à la fois sur les indices des  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$ , tant sur ces quantités elles-mêmes que sur leurs dérivées, et sur les lettres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  indiquant l'ordre de différenciation de ces quantités.

La symétries des groupes (51), (52), (53), (72), (73), (74), nous montre d'autre part que nous trouverons les mêmes relations pour les fonctions  $v$ ,  $w$ .

A ces six relations nouvelles nous donnerons un numéro unique (91). Elles sont comme on voit une extension des six équations relatives aux déformations infiniment petites trouvées en 1864 par Barré de Saint-Venant.

Ces résultats acquis, imaginons que nous ayons trouvé un système de valeur  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ , vérifiant les équations (91). A ce système correspondra un groupe (unique) d'intégrales  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , définies par le système (75), (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>), et ce groupe sera entièrement déterminé si l'on se donne pour les valeurs  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$  des variables indépendantes :

- 1° Les valeurs initiales  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  des fonctions;
- 2° Les valeurs initiales de toutes les dérivées paramétriques qui y figurent, c'est-à-dire ici les valeurs initiales de toutes les dérivées premières.

L'indétermination de ce système dépendrait donc de douze arbitraires; mais remarquons que d'après l'énoncé même du problème ce nombre se réduit à six. En effet, pour  $a = a_0$ ,  $b = b_0$ ,  $c = c_0$ , les six fonctions  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ , prennent des valeurs bien déterminées et connues  $\varepsilon_{1.0}$ ,  $\varepsilon_{2.0}$ ,  $\varepsilon_{3.0}$ ,  $\gamma_{1.0}$ ,  $\gamma_{2.0}$ ,  $\gamma_{3.0}$ , et les valeurs initiales correspondantes des neuf dérivées premières des fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , sont liées entre elles par les six relations.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_0 + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)_0^2 \right] = \varepsilon_{1.0}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)_0 + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial b}\right)_0^2 \right] = \varepsilon_{2.0}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial c}\right)_0 + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial c}\right)_0^2 \right] = \varepsilon_{3.0}$$

92)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial b}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_0 \left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)_0 \left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial b}\right)_0 \left(\frac{\partial w}{\partial c}\right)_0 = \gamma_{1.0}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_0 \left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)_0 \left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)_0 \left(\frac{\partial w}{\partial c}\right)_0 = \gamma_{2.0}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_0 \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)_0 \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial b}\right)_0 \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)_0 = \gamma_{3.0}$$

De ces six relations nous pourrons en général tirer les valeurs initiales de six des dérivées premières quelconques en fonction de  $\varepsilon_{1.0}$ ,  $\varepsilon_{2.0}$ ,  $\varepsilon_{3.0}$ ,  $\gamma_{1.0}$ ,  $\gamma_{2.0}$ ,  $\gamma_{3.0}$ , et des valeurs initiales des trois dérivées restantes. L'indétermination ne dépend donc plus en général que de six arbitraires.

Nous allons montrer que l'on peut en général choisir les valeurs initiales des trois dérivées restantes d'une façon telle, que si on désigne par  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ , un autre système de fonctions vérifiant identiquement le système (75), (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>), on ait :

$$\begin{aligned} (93) \quad & \begin{cases} u' = u + l_1 a + m_1 b + n_1 c + \lambda_1 \\ v' = v + l_2 a + m_2 b + n_2 c + \lambda_2 \\ w' = w + l_3 a + m_3 b + n_3 c + \lambda_3 \end{cases} \end{aligned}$$

$\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  étant des constantes arbitraires,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  étant les neuf cosinus directeurs d'une transformation orthogonale.

En effet, s'il en est ainsi, ces neuf cosinus seront liés entre eux par les relations

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0 \\ n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 = 0 \\ l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0 \end{array} \right.$$

qui doivent être identiquement vérifiées, quelles que soient les valeurs de  $a, b, c$ .

D'autre part,  $u', v', w'$  vérifiant identiquement le système (75), (75<sup>bia</sup>), (75<sup>ter</sup>), vérifient aussi identiquement le système équivalent (6), (7). Écrivons donc cette condition, nous devons avoir les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial a} \right)^2 \right] + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial a} \right) l_1 + \frac{\partial v}{\partial a} l_2 \\ + \frac{\partial w}{\partial a} l_3 + \frac{1}{2} \left[ l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 \right] = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial b} \right)^2 \right] + \frac{\partial u}{\partial b} m_1 + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial b} \right) m_2 \\ + \frac{\partial w}{\partial b} m_3 + \frac{1}{2} \left[ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \right] = \varepsilon_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial c} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial c} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial c} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial c} \right)^2 \right] + \frac{\partial u}{\partial c} n_1 + \frac{\partial v}{\partial c} n_2 + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \right) n_3 + \frac{1}{2} \left[ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \right] = \varepsilon_3$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial v}{\partial b} \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial w}{\partial c} + m_1 n_1 + m_2 n_2 \\ + m_3 n_3 + m_1 \frac{\partial u}{\partial c} + n_1 \frac{\partial u}{\partial b} + m_2 \frac{\partial v}{\partial c} + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial b} \right) n_2 \\ + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \right) m_3 + \frac{\partial w}{\partial b} n_3 = \gamma_1 \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial w}{\partial c} + n_1 l_1 + n_2 l_2 \\ + n_3 l_3 + l_1 \frac{\partial u}{\partial c} + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial c} \right) n_1 + l_2 \frac{\partial v}{\partial c} + n_2 \frac{\partial v}{\partial a} \\ + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \right) l_3 + n_3 \frac{\partial w}{\partial a} = \gamma_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial w}{\partial b} + l_1 m_1 + l_2 m_2 \\ + l_3 m_3 + l_1 \frac{\partial u}{\partial b} + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial a} \right) m_1 + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial b} \right) l_2 \\ + m_2 \frac{\partial v}{\partial a} + l_3 \frac{\partial w}{\partial b} + m_3 \frac{\partial w}{\partial a} = \gamma_3 \end{aligned}$$

Mais si on remarque que  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , vérifient identiquement le système (75), (75<sup>b\*</sup>), (75<sup>ter</sup>) et par suite le système équivalent (6), (7), et si en outre on tient compte des relations (94), on voit que ces identités se réduisent aux suivantes :

$$(96) \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) l_1 + \frac{\partial v}{\partial a} l_2 + \frac{\partial w}{\partial a} l_3 + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial b} m_1 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) m_2 + \frac{\partial w}{\partial b} m_3 + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial c} n_1 + \frac{\partial v}{\partial c} n_2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) n_3 + \frac{1}{2} = 0 \\ m_1 \frac{\partial u}{\partial c} + n_1 \frac{\partial u}{\partial b} + m_2 \frac{\partial v}{\partial c} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) n_2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) m_3 + \frac{\partial w}{\partial b} n_3 = 0 \\ l_1 \frac{\partial u}{\partial c} + n_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) + l_2 \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial v}{\partial a} n_2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) l_3 + \frac{\partial w}{\partial a} n_3 = 0 \\ l_1 \frac{\partial u}{\partial b} + m_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) + l_2 \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) + \frac{\partial v}{\partial a} m_2 + \frac{\partial w}{\partial b} l_3 + \frac{\partial w}{\partial a} m_3 = 0 \end{array} \right.$$

Nous pouvons d'ailleurs les grouper de la façon suivante :

$$(97) \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) l_1 + \frac{\partial v}{\partial a} l_2 + \frac{\partial w}{\partial a} l_3 + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial b} l_1 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) l_2 + \frac{\partial w}{\partial b} l_3 + m_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) + m_2 \frac{\partial v}{\partial a} + m_3 \frac{\partial w}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial c} l_1 + \frac{\partial v}{\partial c} l_2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) l_3 + n_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) + n_2 \frac{\partial v}{\partial a} + n_3 \frac{\partial w}{\partial a} = 0 \end{array} \right.$$

$$(98) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial b} m_1 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) m_2 + \frac{\partial w}{\partial b} m_3 + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial c} m_1 + \frac{\partial v}{\partial c} m_2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) m_3 + n_1 \frac{\partial u}{\partial b} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) n_2 + \frac{\partial w}{\partial b} n_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$(99) \quad \frac{\partial u}{\partial c} n_1 + \frac{\partial v}{\partial c} n_2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) n_3 + \frac{1}{2} = 0$$

Les identités (97), (98), (99) doivent avoir lieu, quelles que soient les valeurs de  $a, b, c$ . De plus, si l'on remarque que les relations (97) sont linéaires par rapport à  $l_1, l_2, l_3$ , et que le déterminant de ces quantités considérées comme inconnues n'est autre que le déterminant  $\mathfrak{D}$  dont l'expression, quels que soient  $a, b, c$ , est toujours différente de zéro (nous le montrerons au § 5), si on reste dans le domaine du problème physique, nous voyons qu'il nous sera toujours possible de calculer  $l_1, l_2, l_3$ , quels que soient  $a, b, c$ .

De même dans les relations (98), il est facile de voir que l'un au moins des déterminants :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial b} & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} \\ \frac{\partial u}{\partial c} & \frac{\partial v}{\partial c} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ \frac{\partial u}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, quels que soient  $a, b, c$ , car ils ne sont autre chose que trois mineurs du premier ordre de  $\mathfrak{D}$ , et ils ne peuvent être nuls à la fois sans que  $\mathfrak{D}$  le soit aussi; par suite, il sera toujours possible, quels que soient  $a, b, c$ , de calculer deux quelconques des quantités  $m_1, m_2, m_3$ , en fonction de la troisième et de  $n_1, n_2, n_3$ .

Enfin dans la relation (99), l'une au moins des quantités,  $\frac{\partial u}{\partial c}, \frac{\partial v}{\partial c}$

$\left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right)$  est différente de zéro quels que soient  $a, b, c$ ; car si elles étaient toutes les trois nulles, le déterminant  $\mathfrak{D}$  le serait aussi. Il sera donc toujours possible de calculer, quels que soient  $a, b, c$ , l'une quelconque des trois quantités  $n_1, n_2, n_3$ , en fonction des deux autres.

En résumé, on voit que si on reste dans le domaine du problème physique, il sera en général possible de calculer, quelles que soient les valeurs de  $a, b, c$ , six quelconques des quantités  $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ , en fonction de trois d'entre elles et de toutes les dérivées premières des fonctions  $u, v, w$ . En particulier, nous pourrions les calculer pour les valeurs  $a = a_0, b = b_0, c = c_0$ , des variables indé-

pendantes. Si maintenant nous tenons compte des relations (94), il est facile de voir que trois quelconques d'entre elles, jointes à (97), (98), (99), nous permettront de déterminer toutes les quantités,  $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ , et que les trois autres nous donneront trois relations auxquelles devront satisfaire identiquement les valeurs initiales  $\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_o \dots \left(\frac{\partial w}{\partial c}\right)_o$  de toutes les dérivées premières de  $u, v, w$ .

Ces trois relations, que nous appellerons (100), jointes à (92) détermineront alors les valeurs initiales de toutes les dérivées paramétriques qu'il est nécessaire de se donner pour qu'un groupe d'intégrales  $u, v, w$ , du système soient complètement déterminées, et de plus les détermineront d'une façon telle que si un deuxième système de fonctions  $u', v', w'$ , vérifient identiquement le système (75), (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>), ce système ne différera du système  $u, v, w$ , que par des fonctions linéaires de  $a, b, c$  définissant une transformation orthogonale.

Ceci posé, donnons-nous arbitrairement trois quantités  $u_0, v_0, w_0$ , auxquelles doivent se réduire  $u, v, w$  pour  $a = a_0, b = b_0, c = c_0$ ; puis prenons pour valeurs initiales des dérivées paramétriques du système celles qui vérifient les identités (92) et (100). Le théorème fondamental de M. Riquier rappelé au chapitre II, § 2, nous apprend que le système (75), (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>) admet un groupe unique d'intégrales ordinaires répondant à ces données initiales, et les considérations développées plus haut nous indiquent que si un deuxième système de fonctions  $u', v', w'$  vérifie aussi identiquement le système (75), (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>), on aura :

$$(101) \quad \begin{cases} u' = u + l_1 a + m_1 b + n_1 c + \lambda_1 \\ v' = v + l_2 a + m_2 b + n_2 c + \lambda_2 \\ w' = w + l_3 a + m_3 b + n_3 c + \lambda_3 \end{cases}$$

$l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$  étant des quantités bien déterminées, liées entre elles par les relations (86) et dépendant des valeurs initiales des dérivées paramétriques.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , étant trois constantes arbitraires.

Il résulte d'ailleurs de cette étude que si l'on veut donner au pro-



blème un sens physique bien déterminé, il n'y a pas d'autre choix possible des conditions initiales.

REMARQUE. — Nous avons dit au chapitre II, § 2, que dans une lettre personnelle M. Riquier nous avait fait remarquer que si un système orthonome n'était pas passif, il n'en résultait pas pour cela qu'il fût privé d'intégrales; seulement ces intégrales ne correspondant pas à des déterminations initiales arbitrairement choisies, on ne savait pas comment choisir ces dernières pour que les intégrales correspondantes existent.

Nous pourrions nous demander si le système étudié (75), (75<sup>bia</sup>), (75<sup>ter</sup>) ne pourrait pas rentrer dans ce cas et voir s'il ne pourrait pas admettre un système d'intégrales  $u, v, w$  répondant à une détermination initiale donnée d'avance, bien que la condition de passivité ne soit pas remplie.

Expliquons tout d'abord ce que M. Riquier appelle *détermination initiale* et *portion principale* d'un développement de fonction par la formule de *Taylor*.

Si on considère les trois fonctions  $u, v, w$ , vérifiant le système différentiel (75), (75<sup>bia</sup>), (75<sup>ter</sup>) et si on suppose ces fonctions développées par la formule de *Taylor*, on appelle *détermination initiale* de ces fonctions l'ensemble des termes où figurent les valeurs initiales de la fonction et de ses dérivées paramétriques. Ainsi pour la fonction  $u$ , sa détermination initiale sera :

$$u_0 + (a - a'_0) \left( \frac{\partial u}{\partial a} \right)_0 + (b - b'_0) \left( \frac{\partial u}{\partial b} \right)_0 + (c - c'_0) \left( \frac{\partial u}{\partial c} \right)_0$$

et l'on nomme *portion principale* du développement la partie restante du développement, c'est-à-dire celle construite au moyen des dérivées principales du système, lorsque dans ces dérivées on aura donné aux fonctions inconnues et aux dérivées paramétriques qui y figurent leurs valeurs initiales.

Ceci posé, il est facile de voir que si trois fonctions  $u, v, w$  sont des intégrales du système (75), (75<sup>bia</sup>), (75<sup>ter</sup>) répondant à des déterminations initiales choisies d'avance, il est nécessaire que la condition de passivité soit remplie.

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi, il existerait pour une même dérivée cardinale du système, et pour les mêmes valeurs initiales, des fonctions et des dérivées paramétriques deux valeurs différentes. Par suite, les dérivées principales du système pourraient à leur tour avoir deux ou plusieurs valeurs différentes. Il en résulterait que la *portion principale* du développement de la fonction par la formule de Taylor pourrait avoir elle aussi plusieurs valeurs, et nous arriverions à la conclusion suivante :

A une détermination initiale donnée, correspondraient des groupes d'intégrales  $u, v, w, u', v', w', u'', v'', w'', \dots$  différant entre elles par des fonctions d'un degré supérieur au premier par rapport aux  $a, b, c$ .

Or, nous avons vu dans le paragraphe précédent que si des fonctions  $u', v', w', u'', v'', w'', \dots$  vérifiaient le système (75), (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>) et par suite le système équivalent (6) et (7), il était possible de choisir les données initiales d'une façon telle que l'on ait :

$$u' = u + l_1 a + m_1 b + n_1 c + \lambda_1$$

$$v' = v + l_2 a + m_2 b + n_2 c + \lambda_2$$

$$w' = w + l_3 a + m_3 b + n_3 c + \lambda_3$$

Ces deux résultats sont, comme on voit, contradictoires, et il est nécessaire pour le système étudié que la condition de passivité soit remplie.

#### § 4. Application de la méthode à quelques cas particuliers.

**Théorème.** — Si les six fonctions  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , sont identiquement nulles, la déformation est nulle, et si le milieu a subi une déformation, on peut passer de la position  $S_0$  qu'il occupait à l'instant initial, à la position  $S$  qu'il occupe à l'instant final par un mouvement d'ensemble du milieu à la façon d'un corps solide.

En effet, dans ce cas, les fonctions  $u, v, w$ , qui définissent le dépla-

cement, ont toutes leurs dérivées secondes identiquement nulles. L'intégration du système (75), (75<sup>bia</sup>), (75<sup>cr</sup>) donne alors

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = A_1 a + B_1 b + C_1 c + D_1 \\ v = A_2 a + B_2 b + C_2 c + D_2 \\ w = A_3 a + B_3 b + C_3 c + D_3 \end{array} \right.$$

les constantes  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$  étant liées entre elles par les relations

$$(103) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 + \frac{1}{2} [A_1^2 + A_2^2 + A_3^2] = 0 \\ B_1 + \frac{1}{2} [B_1^2 + B_2^2 + B_3^2] = 0 \\ C_1 + \frac{1}{2} [C_1^2 + C_2^2 + C_3^2] = 0 \\ B_3 + C_2 + B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 C_3 = 0 \\ C_1 + A_3 + A_2 C_1 + A_1 C_2 + A_3 C_3 = 0 \\ A_2 + B_1 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = 0 \end{array} \right.$$

qui sont, comme nous allons le voir, les six relations liant les neuf cosinus directeurs d'une transformation orthogonale. On aura en effet :

$$(104) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = (1 + A_1) a + B_1 b + C_1 c + D_1 \\ y = A_2 a + (1 + B_2) b + C_2 c + D_2 \\ z = A_3 a + B_3 b + (1 + C_3) c + D_3 \end{array} \right.$$

Les neuf cosinus sont donc ici :  $(1 + A_1)$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_1$   $(1 + B_2)$ ,  $B_3$ ,  $C_1$ ,  $C_2$   $(1 + C_3)$ . Nous verrons, d'ailleurs, dans un prochain paragraphe que le signe du déterminant d'une déformation générale, qui se réduit dans ce cas particulier à

$$(105) \quad \begin{array}{ccc} 1 + A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & 1 + B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & 1 + C_3 \end{array}$$

ne change pas pendant la déformation du milieu si l'on n'envisage que le problème physique. Par suite, les deux trièdres de transformation ont la même orientation, et il sera toujours possible de passer de l'un à l'autre par une rotation autour de leur origine, ou par trois rotations directes autour d'axes convenablement choisis, les axes d'Euler par exemple.

Ainsi lorsqu'un milieu a subi une déformation pour laquelle les six fonctions  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  sont identiquement nulles, il sera toujours possible de passer de sa première position à la seconde par une translation suivie d'une rotation.

**RÉCIPROQUEMENT.** — Si la déformation est nulle, les six fonctions  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ , sont identiquement nulles. Il suffit de se reporter à la définition de ces fonctions pour voir l'évidence de cette proposition.

**Théorème.** — *Deux déformations d'un même milieu pour lesquelles les six fonctions  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  sont identiques, sont des déformations identiques; c'est-à-dire telles qu'on peut passer de l'une à l'autre par un déplacement d'ensemble du milieu.*

En effet, à ces deux déformations correspondent deux systèmes de fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ;  $u'$   $v'$   $w'$ , définies par le même système différentiel (6), (7).

Mais nous avons vu que si un système de fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$  constituait pour le système (6), (7) un groupe d'intégrales répondant

à des conditions initiales données, tout autre groupe  $u', v', w'$  vérifiant identiquement le même système pouvait être obtenu en ajoutant aux fonctions  $u, v, w$  du premier trois fonctions linéaires de  $a, b, c$  définissant une transformation orthogonale.

Or, ceci peut s'exprimer de la manière suivante :

Étant donné un groupe d'intégrales du système différentiel (6), (7), tout autre groupe s'en déduira en superposant à la déformation que représente le premier groupe un déplacement d'ensemble fini du milieu.

### § 5. — La déformation homogène de Lord Kelvin.

Supposons que les six fonctions  $\epsilon_i, \gamma_i$  soient des constantes non toutes nulles, et intégrons le système (75), (75<sup>bis</sup>), (75<sup>ter</sup>); nous aurons :

$$(106) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = A_1 a + B_1 b + C_1 c + D_1 \\ v = A_2 a + B_2 b + C_2 c + D_2 \\ w = A_3 a + B_3 b + C_3 c + D_3 \end{array} \right.$$

Les constantes  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$  étant liées entre elles par les relations :

$$(107) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 + \frac{1}{2} [A_1^2 + A_2^2 + A_3^2] = K_1 \\ B_2 + \frac{1}{2} [B_1^2 + B_2^2 + B_3^2] = K_2 \\ C_3 + \frac{1}{2} [C_1^2 + C_2^2 + C_3^2] = K_3 \\ B_3 + C_2 + B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 C_3 = M_1 \\ C_1 + A_3 + A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3 = M_2 \\ A_2 + B_1 + A_1 B_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3 = M_3 \end{array} \right.$$

$K_1, K_2, K_3, M_1, M_2, M_3$  étant les valeurs constantes des six fonctions  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ .

Dans ce cas

$$(108) \quad \begin{cases} x = (1 + A_1)a + B_1b + C_1c + D_1 \\ y = A_2a + (1 + B_2)b + C_2c + D_2 \\ z = A_3a + B_3b + (1 + C_3)c + D_3 \end{cases}$$

et la transformation qu'elles représentent est une transformation homographique. C'est en partant de la définition de la transformation homographique que Lord Kelvin a établi les propriétés de ce qu'il a appelé *la déformation homogène*. Nous ne reprendrons pas cette étude ici, nous avons voulu seulement montrer que la définition de déformation homogène qui se trouve immédiatement en supposant  $\varepsilon_i, \gamma_i$  constantes par l'intégration du système (8), (9) dans le cas des déformations infiniment petites, se généralise aussi dans le cas des déformations finies (1).

### § 6. — Étude de la variation du déterminant $\Delta$ avec la déformation.

Nous avons vu que si l'on désigne par  $a, b, c$  les coordonnées d'un point dans le milieu non déformé, par  $x, y, z$  celles du point correspondant dans le milieu déformé, on avait :

$$(109) \quad \begin{cases} x = a + u(a, b, c) \\ y = b + v(a, b, c) \\ z = c + w(a, b, c) \end{cases}$$

(1) W. THOMSON, *Mathematical Papers*, art. XCII (*Elasticity and Heat*, t. III, p. 85).

W. THOMSON et TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, vol. I, part. I, p. 116 et suiv.

COSSERAT, *Mémoire sur la théorie de l'élasticité* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, 1896).

APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, p. 226 et suiv.

Ces relations définissent un changement de variables si le déterminant fonctionnel

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial u}{\partial b} & \frac{\partial u}{\partial c} \\ \frac{\partial v}{\partial a} & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial v}{\partial c} \\ \frac{\partial w}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial b} & 1 + \frac{\partial w}{\partial b} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, quelles que soient les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dans le domaine considéré. Or, ce déterminant varie avec la déformation; il est donc intéressant d'étudier cette variation.

Pour cela, établissons l'équation de continuité sous la forme que lui a donnée Lagrange. C'est-à-dire cherchons à exprimer que la masse d'un élément de volume infiniment petit est la même avant et après la déformation. Considérons pour cela à l'instant  $t_0$  dans le milieu  $E_0$  une surface fermée  $S_0$  limitant un volume  $V_0$ . A l'instant  $t$  cette surface sera devenue  $S$  et limitera un volume  $V$ .

D'après les hypothèses faites sur la déformation étudiée, les points situés sur  $S_0$  se trouveront sur  $S$  et les points intérieurs à  $S_0$  seront intérieurs à  $S$ . La masse de matière qui remplissait  $S_0$  est donc la même que celle qui remplit  $S$ , et nous pouvons écrire :

$$(110) \quad \iiint_V \rho dx dy dz = \iiint_{V_0} \rho_0 da db dc;$$

mais, d'après une relation bien connue du changement de variables dans les intégrales multiples<sup>(1)</sup>, on a :

(<sup>1</sup>) E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 130 (Voir à son défaut tout autre traité d'analyse).

$$(111) \quad \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz = \iiint_{V_0} \pm \rho \, \mathfrak{D} \, da \, db \, dc$$

$\mathfrak{D}$  étant le déterminant fonctionnel des relations (109) qui définissent le changement de variables considéré. Des relations (110) et (111) nous tirons :

$$\iiint (\pm \rho \, \mathfrak{D} - \rho_0) \, da \, db \, dc = 0.$$

Or, on démontre en analyse que pour que cette intégrale soit nulle, il faut et il suffit que

$$(112) \quad \pm \rho \, \mathfrak{D} - \rho_0 = 0,$$

quelles que soient les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

De la relation (112) nous tirons :

$$\pm \mathfrak{D} = \frac{\rho_0}{\rho}$$

Quel signe doit on prendre?

Avant la déformation  $\mathfrak{D} = +1$ .

Si l'on reste dans le domaine du problème physique,  $\mathfrak{D}$  restera toujours positif, car  $\rho_0$  et  $\rho$  sont toujours positives; il n'y a pas de doute dans ce cas sur le choix du signe. Mais si l'on veut traiter la question au point de vue purement analytique, rien ne nous empêche de supposer que  $\rho$  devienne infini par valeurs croissantes pour décroître ensuite. Dans ce cas  $\mathfrak{D}$  passerait par zéro et changerait de signe. Il faudrait alors prendre le signe  $-$ .

L'exemple suivant fera mieux comprendre la portée de cette remarque qui a servi de base à la méthode de transformation du système différentiel qui définit les  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$ .



Prenons un cône à deux nappes A et B. Appelons O le sommet de ce cône; puis supposons que la matière contenue dans une région  $E_0$  de l'espace se soit déformée d'une manière continue et soit venue occuper la région entière de la nappe A. Supposons maintenant qu'au sommet O, commun aux deux nappes, il existe une ouverture infiniment petite par laquelle la matière en continuant à se déformer passe de la nappe A dans la nappe B. Il est clair que dans ce cas  $\rho$  aura passé par l'infini au point O.

Soit  $\rho_1$  sa valeur en un point  $P_1$  de la nappe A. Au point symétrique  $Q_1$  de  $P_1$  par rapport au point O de la nappe B,  $\rho$  reprendra la même valeur  $\rho_1$ . Mais d'après ce que nous avons vu  $\mathcal{D}$  sera négatif; si donc on veut écrire l'équation de continuité dans la région B, il faudra prendre le signe — devant  $\mathcal{D}$ . Cette remarque exclut, comme on voit, si l'on reste dans le domaine physique, toute hypothèse sur la déformation par symétrie d'un milieu continu.

# CALCULS ABRÉGÉS

## DES

# SINUS ET COSINUS

## CIRCULAIRES OU HYPERBOLIQUES

**Par M. P. BARBARIN**

### Sinus et Cosinus Circulaires.

I. *Sinus*. — En partant des valeurs approchées à moins de  $\frac{1}{10^{13}}$ ,

$$\sin 10'' = 0,0000484813681,$$

$$\cos 10'' = 0,9999999988248,$$

on peut par les formules de Thomas Simpson calculer de proche en proche les valeurs naturelles des sinus et cosinus des multiples de  $10''$  avec sept décimales au moins pour toute l'étendue de la Table. Les logarithmes de ces mêmes sinus et cosinus s'obtiennent à leur tour en appliquant les séries convergentes qui donnent les développements de  $\log \sin \left( \frac{m}{n} 90^\circ \right)$  et  $\log \cos \left( \frac{m}{n} 90^\circ \right)$  par rapport aux puissances croissantes de  $\frac{m}{n}$ .

Pour passer de là aux angles qui contiennent des secondes ou fractions de secondes intermédiaires, on interpole par différences proportionnelles entre les limites extrêmes 3 degrés et 87 degrés. Mais, de zéro à 3 degrés, par exemple, les logarithmes-sinus variant trop rapidement pour admettre que la différence logarithmique est proportionnelle à la différence angulaire, même dans un très petit espace, on sait qu'il est d'usage d'employer les logarithmes-rapports qui varient beaucoup plus lentement, en écrivant l'équation

$$(1) \quad \log \sin x = \log x + \log \left( \frac{\sin x}{x} \right);$$

de zéro à  $3^\circ$ ,  $\frac{\sin x}{x}$  varie de 1 à 0,9995 environ; de zéro à  $45^\circ$  il décroît seulement de 1 à 0,888576.

Le but de notre travail est de montrer qu'en modifiant convenablement la marche des calculs, l'équation (1) permet d'obtenir rapidement, et avec une approximation connue, le logarithme-sinus d'un arc quelconque mesuré en parties du rayon. On transformera ensuite si l'on veut cet arc en degrés ou grades pour l'inscrire dans une table.

Nous partons du développement connu de  $\sin x$  en série, et posons

$$U_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!},$$

$$U_2 = 1 - \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{x^4}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)(2n+5)} \dots;$$

nous avons ainsi

$$(2) \quad \sin x = x \left[ U_1 + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} U_2 \right] = x U.$$

Considérons maintenant la progression géométrique

$$V_1 = 1 - \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{x^4}{(2n+2)^2(2n+3)^2} \dots$$

qui a pour somme

$$V_1 = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+2)(2n+3) + x^2},$$

et posons

$$V = U_1 + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} V_1;$$

$V$  est évidemment plus grand que  $U$  si  $n$  est pair, plus petit que  $U$  si  $n$  est impair.

Ceci posé, calculons le quotient  $\frac{U}{V}$  ordonné par rapport aux puissances croissantes de  $x$ ; le premier terme en est égal à 1, et ceux qui

suivent ne contiennent la variable qu'aux puissances paires croissantes  $2n + 4, 2n + 6 \dots$  Soient alors

$$T_2 = \frac{1}{(2n+5)!} - \frac{1}{(2n+3)!(2n+2)(2n+3)} = \frac{-(8n+14)}{(2n+5)!(2n+2)(2n+3)},$$

$$T_3 = \frac{1}{(2n+7)!} - \frac{1}{(2n+3)!(2n+2)^2(2n+3)^2} - \frac{T_2}{3!},$$

$$T_4 = \frac{1}{(2n+9)!} - \frac{1}{(2n+3)!(2n+2)^3(2n+3)^3} - \frac{T_2}{5!} - \frac{T_3}{3!},$$

et en général,

$$T_{p+1} = \frac{1}{(2n+2p+3)!} - \frac{1}{(2n+3)!(2n+2)^p(2n+3)^p} \\ - \frac{T_2}{(2p-1)!} - \frac{T_3}{(2p-3)!} \dots - \frac{T_p}{3!},$$

nous avons

$$(3) \quad \frac{U}{V} = 1 + (-1)^{n+2} T_2 x^{2n+4} + (-1)^{n+3} T_3 x^{2n+6} \dots \\ + (-1)^{n+p+1} T_{p+1} x^{2n+2p+2} \dots$$

et par conséquent

$$(4) \quad \sin x = x \cdot V \cdot \left( \frac{U}{V} \right).$$

$T_2$  est négatif, les coefficients qui suivent sont alternativement positifs et négatifs. Mais, en valeur absolue,

$$\left( \frac{T_3}{T_2} \right) < \frac{1}{3!},$$

$$\left( \frac{T_4}{T_3} \right) < \frac{1}{5!},$$

$$\left( \frac{T_{p+1}}{T_p} \right) < \frac{1}{(2p-1)!},$$

donc les coefficients de  $\frac{U}{V}$  décroissent en valeur absolue d'une façon

très rapide, et à plus forte raison en est-il de même des termes de ce quotient, puisque dans nos calculs  $x^n$  n'atteint jamais 1.

Si nous prenons maintenant les logarithmes des deux membres de l'équation (4), nous avons la nouvelle équation

$$(5) \quad \log \sin x = \log x + \log V - \log \left( \frac{U}{V} \right),$$

qui fait connaître  $\log \sin x$  en fonction des éléments de notre analyse.

Nous nous proposons de rechercher dans quelles limites d'approximation il sera permis de remplacer l'équation (5) par l'équation plus simple

$$(6) \quad \log \sin x = \log x + \log V.$$

L'angle  $x$  est donné exactement;  $V$  est une fraction rationnelle paire à coefficients entiers; nous admettrons d'ailleurs que leurs logarithmes peuvent être calculés avec une approximation, sinon indéfinie, du moins aussi lointaine qu'il sera nécessaire, c'est-à-dire inférieure à une limite que nous saurons fixer.

Dans ces conditions, le problème se pose de la façon suivante :

Déterminer  $x$  de sorte que  $\log \left( \frac{U}{V} \right)$  soit inférieur à  $\frac{1}{10^{k+1}}$  en valeur absolue, calculer dans cette hypothèse les logarithmes de  $x$  et de  $V$  avec  $K + 1$  chiffres décimaux et faire leur somme en n'en conservant que les  $K$  premières décimales.

Soit par exemple  $n$  impair. En se reportant à l'équation (3) on voit que  $\frac{U}{V}$  est de la forme  $1 + A$ ,  $A$  désignant une suite alternée dont le premier terme  $a$  est positif et a pour valeur

$$a = \frac{(8n + 14)x^{2n+4}}{(2n + 5)!(2n + 2)(2n + 3)};$$

pour avoir

$$\log(1 + A) < \frac{1}{10^{k+1}}.$$

il suffit d'avoir,  $M$  étant le module des logarithmes décimaux,

$$M \left( \frac{A}{1} - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} \dots \right) < \frac{1}{10^{k+1}}$$

et *a fortiori* la condition est-elle remplie si l'on a

$$Ma \leq \frac{1}{10^{k+1}},$$

c'est-à-dire si  $x$  est inférieur ou au plus égal à la limite  $N$  définie par l'égalité

$$(7) \quad N = \sqrt[n+4]{\frac{(2n+5)!(2n+2)(2n+3)}{M(8n+14)10^{k+1}}}.$$

Lorsque  $n$  est pair, on a  $\log \left( \frac{U}{V} \right) = -\log \left( \frac{V}{U} \right)$ , et comme  $\frac{V}{U}$  a encore la forme  $1 + A'$ ,  $A'$  étant une suite alternée qui a pour premier terme  $a$ , l'on retrouve la condition (7).

En résumé, nous pouvons formuler la proposition suivante :

*Si  $x$  ne dépasse pas en valeur absolue une certaine limite supérieure  $N$ , fonction connue de l'entier  $K$ , on obtiendra avec  $K$  chiffres décimaux le logarithme de  $\sin x$  en ajoutant entre eux le logarithme de  $x$  et celui de la fraction rationnelle  $V$  calculés avec  $K+1$  chiffres décimaux, et en ne conservant que les  $K$  premières décimales de cette somme.*

Par exemple, pour  $K=7$ , on a

$$\begin{array}{ll} \text{avec } n=2, & N=0,5733.), \\ n=3, & N=1,05704. \end{array}$$

Donc, en prenant  $n=3$ , la proposition s'applique à tous les logarithmes-sinus des angles inférieurs à  $\frac{\pi}{4}$  calculés avec 7 décimales. Il suffirait de faire  $n=2$  pour obtenir ces mêmes logarithmes avec 5 décimales seulement.

II. *Cosinus*. — En employant des notations analogues à celles du paragraphe précédent, nous avons

$$U'_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!},$$

$$U'_2 = 1 - \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{x^4}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)} \dots,$$

$$V'_1 = 1 - \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{x^4}{(2n+1)^2(2n+2)^2} \dots = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+1)(2n+2) + x^2},$$

$$U' = U'_1 + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} U'_2,$$

$$V' = U'_1 + (-1)^n \frac{x^2}{2n!} V'_1,$$

et

$$(8) \quad \cos x = V' \left( \frac{U'}{V'} \right).$$

$V'$  est aussi une fraction rationnelle paire de  $x$  à coefficients entiers.

Soient les nombres

$$T'_2 = \frac{1}{(2n+4)!} + \frac{1}{(2n+2)!(2n+1)(2n+2)} = -\frac{(8n+10)}{(2n+4)!(2n+1)(2n+2)},$$

$$T'_3 = \frac{1}{(2n+6)!} - \frac{1}{(2n+2)!(2n+1)^2(2n+2)^2} - \frac{T'_2}{2!},$$

en général

$$T'_{p+1} = \frac{1}{(2n+2p+2)!} - \frac{1}{(2n+2)!(2n+1)^p(2n+2)^p} - \frac{T'_2}{(2p-2)!} - \frac{T'_3}{(2p-4)!} \dots - \frac{1}{2}.$$

alternativement négatifs et positifs, et tels qu'en valeur absolue

$\left( \frac{T'_{p+1}}{T'_2} \right)$  soit inférieur à  $\frac{1}{(2p-2)!}$ ; nous pouvons écrire :

$$\frac{U'}{V'} = 1 + (-1)^{n+2} T'_2 x^{2n+4} + \dots + (-1)^{n+2p+1} T'_{p+1} x^{2n+2p+2}.$$

ou

$$\frac{U'}{V'} = 1 + A'.$$

Quand  $n$  est impair, le premier terme  $a'$  de la suite alternée  $A'$  est positif et a pour valeur

$$a' = \frac{(8n + 10)x^{2n+4}}{(2n + 4)!(2n + 1)(2n + 2)}$$

Si donc nous calculons le nombre  $N'$  donné par la formule

$$(9) \quad N' = \sqrt[2n+4]{\frac{(2n + 4)!(2n + 1)(2n + 2)}{M(8n + 10)10^{k+1}}},$$

pour toute valeur de  $x$  inférieure ou au plus égale à  $N'$ ,  $\log \left( \frac{U'}{V'} \right)$  est moindre que  $\frac{1}{10^{k+1}}$ , donc, à moins de  $\frac{1}{10^k}$ ,

$$(10) \quad \log \cos x = \log V'.$$

Lorsque  $n$  est pair, on obtient un résultat identique, parce que sous la réserve de la condition de limite imposée à  $x$ ,  $\text{colog} \left( \frac{V'}{U'} \right)$  est encore inférieur à  $\frac{1}{10^{k+1}}$

Par exemple, pour  $K = 7$ , on a

$$\begin{array}{ll} \text{avec } n = 2, & N' = 0,42533; \\ n = 3, & N' = 0,82010. \end{array}$$

Si l'on se bornait à  $K = 5$ , on prendrait

$$\begin{array}{ll} \text{avec } n = 2, & N' = 0,75637; \\ n = 3, & N' = 1,29987. \end{array}$$

III. *Calcul des logarithmes circulaires.* — Appliquons les considérations générales qui précèdent à la construction pratique des tables



circulaires à 7 décimales. Les formules à employer sont celles de l'un des groupes suivants :

$$n = 1 (a) \left\{ \begin{array}{l} \log \sin x = \log x + \log \frac{60 - 7x^2}{60 + 3x^2}, \\ \log \cos x = \log \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2}, \end{array} \right.$$

$$n = 2 (b) \left\{ \begin{array}{l} \log \sin x = \log x + \log \frac{5040 - 720x^2 + 22x^4}{5040 + 120x^2}, \\ \log \cos x = \log \frac{120 - 56x^2 + 3x^4}{120 + 4x^2}, \end{array} \right.$$

$$n = 3 (c) \left\{ \begin{array}{l} \log \sin x = \log x + \log \frac{60480 - 9240x^2 + 364x^4 - 5x^6}{60480 + 840x^2}, \\ \log \cos x = \log \frac{40320 - 19440x^2 + 1320x^4 - 26x^6}{40320 + 720x^2}, \end{array} \right.$$

et on les choisira selon la grandeur relative de  $x$ . Ainsi, pour avoir le sinus et le cosinus de l'angle  $x = \frac{1}{2} = 28^\circ 38' 52'', 403$ , nous prendrons  $\log \sin x$  dans le groupe (b) et  $\log \cos x$  dans le groupe (c) parce que  $\frac{1}{2}$  est inférieur à  $N = 0,57330$  ( $K = 7, n = 2$ ) et à  $N' = 0,82010$  ( $K = 7, n = 3$ ); nous trouverons ainsi

$$\log \sin \frac{1}{2} = \log \frac{1}{2} + \log \frac{38891}{40560} = \bar{1},6807212,$$

$$\log \cos \frac{1}{2} = \log \frac{113747}{1296000} = \bar{1},9432879,$$

résultats identiques à ceux des grandes Tables.

Une remarque bien simple permet encore d'abréger notablement les calculs relatifs aux petits angles. Pour ceux-ci, en effet,  $\log V$  varie en valeur absolue d'une façon très faible et conserve, à  $\frac{1}{10^k}$  près, une valeur constante dans un certain intervalle de variation de  $x$ . Si l'on

se donne  $\log V$ , et par suite  $V$ , en posant  $\frac{1}{V} = P$ , et en se bornant à  $n = 1$ ,  $x$  est donné par la formule

$$(11) \quad x = \sqrt{\frac{60(P-1)}{7P+3}}.$$

Désignons par  $P_1, P_2, P_3$  les nombres qui ont successivement pour logarithmes

$$\frac{10q}{10^k+1}, \quad \frac{10q+5}{10^k+1} \quad \text{et} \quad \frac{10(q+1)}{10^k+1},$$

$q$  étant un entier donné, et appelons de même  $x_1, x_2, x_3$  les valeurs correspondantes de  $x$  déduites de la formule (11);  $P_1, P_2, P_3$  sont croissants, ainsi que  $x_1, x_2$  et  $x_3$ . Quand  $x$  est au moins égal à  $x_1$ , mais inférieur à  $x_2$ ,  $\log V$  est compris entre  $\frac{10q}{10^k+1}$  et  $\frac{10q+5}{10^k+1}$ , donc  $\log V$  égale  $\frac{-q}{10^k}$  à  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k}$  près *par excès*, au contraire, quand  $x$  est au moins égal à  $x_2$ , mais inférieur à  $x_3$ ,  $\log V$  égale  $\frac{-(q+1)}{10^k}$  par *défaut*.

Ainsi, en partant de  $q = 0$ , le calcul donne

$$\begin{array}{ll} P_1 = 1, & x_1 = 0, \\ P_2 = 1,00000012, & x_2 = 0,0007746 = 2'39'',77, \\ P_3 = 1,0000023, & x_3 = 0,0010476 = 3'36'',08; \end{array}$$

de zéro à  $2'39'',77$ , le logarithme-sinus égale celui de l'arc à  $\frac{1}{10^7}$  par *excès*, et de  $2'39'',77$  à  $3'36'',08$ , il est égal à celui de l'arc diminué d'une unité du 7<sup>e</sup> ordre décimal, et sa valeur est calculée par défaut. On vérifie ceci aisément sur la table ordinaire qui pour  $2'$  donne

$$\log \sin 2' = \overline{4},7647561 = \log 2',$$

et, pour  $3'$ ,

$$\log \sin 3' = \overline{4},9408473,$$

tandis que

$$\log 3' = \overline{4},9408474.$$

## Sinus et cosinus hyperboliques.

On sait le rôle important que ces fonctions, mises en évidence par Riccati et dénommées par Lambert, jouent dans l'Analyse; on leur doit la transformation de bien des intégrales, qui sans elles eussent été plus difficilement abordables; elles s'introduisent d'une manière naturelle dans maints calculs pratiques d'électricité, dans tous les problèmes de mécanique relatifs à la chaînette, et aussi, comme le faisait remarquer M. Yvon Villarceau<sup>(1)</sup>, dans certains calculs de résistance des matériaux compliqués d'imaginaires à la suite de circonstances spéciales, et que le secours de ces fonctions vient heureusement simplifier. M. Laisant, dans son beau mémoire<sup>(2)</sup>, et Houël, dans l'*Introduction du Recueil de formules et Tables numériques*, ont signalé un grand nombre de leurs applications variées et intéressantes; dans le domaine même tout élémentaire, à côté de la résolution classique de l'équation du troisième degré qui n'a qu'une racine réelle, il faut citer encore la recherche des limites de certaines suites, comme celle de Schwab, et l'une des solutions algébriques du problème de Malfatti. Enfin, la géométrie non Euclidienne de Lobatschefsky et Bolyai fait de ces fonctions un usage constant.

Malgré les nombreux et importants travaux auxquels les fonctions hyperboliques ont donné lieu de la part de Gudermann, Gronau, Houël, Laisant, Realis, etc., bien des mathématiciens hésitent encore à s'en servir; ils se privent cependant d'un outil de transformation bien précieux. Alors que la trigonométrie circulaire fait partie des programmes de la mathématique la plus élémentaire, la trigonométrie hyperbolique était encore ignorée, il n'y a pas bien longtemps, de beaucoup de candidats à nos grandes écoles spéciales et même à la licence. Sa vulgarisation est évidemment liée à l'existence de Tables simples et commodes.

Il a été construit jusqu'à ce jour peu de tables de fonctions hyper-

(<sup>1</sup>) *Annales des Ponts et Chaussées*, 6<sup>e</sup> série, t. I, page 207, février 1881.

(<sup>2</sup>) *Essai sur les fonctions hyperboliques (Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. X, 1875, pages 235-338).

boliques; on n'a guère à citer, comme auteurs de tels ouvrages, que Lambert, Gronau, Houël, Angelo Forti et le major Wladimir Vassal, qui pour atteindre leur but ont suivi plusieurs méthodes différentes.

La première découle de la définition même des fonctions. Soit un argument  $x$ . Cherchons les antilogarithmes naturels A et B de  $x$  et de  $-x$ , nous avons

$$\operatorname{ch} x = \frac{A + B}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{A - B}{2}.$$

La deuxième méthode suivie par Gronau et Vassal, ainsi que par Forti avec une légère modification, consiste à utiliser une propriété qui sert de lien entre les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques. Voici d'abord succinctement le procédé de Forti<sup>(1)</sup>.

Soit  $\varphi$  un angle. L'auteur en calcule un autre  $\tau$  tel que

$$\sin \tau = \operatorname{tg} \varphi;$$

à  $\tau$  correspond un argument hyperbolique  $m$ , (sett  $h$ ), donné par

$$\operatorname{sh} m = \operatorname{tg} \tau,$$

ou

$$\operatorname{th} m = \operatorname{tg} \varphi \text{ (Laisant)}$$

donc

$$m = \frac{1}{2} L \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{2 M} \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi).$$

Ainsi, pour  $\varphi = 12^\circ$ ,

$$\tau = 12^\circ 6', 20'',$$

$$2m = 0,4316946, \quad m = 0,2158473.$$

Dans le livre de Forti, la page gauche est réservée aux fonctions circulaires de  $\varphi$  (degrés, minutes, secondes); dans la page droite sont

(1) *Tavole dei Logaritmi*. Torino, 1877.

inscrites successivement, le long des lignes correspondantes, les valeurs de  $\tau$  et de  $m$ , ainsi que les logarithmes de  $\text{sh } m$  et de  $\text{ch } m$  à 7 décimales. Pour l'exemple numérique cité plus haut, on lit (pages 322-323) :

$$\log \text{sh } m = \bar{1},3375138, \quad \log \text{ch } m = 0,0100393.$$

Cette disposition est assez incommode. D'abord, l'on ne trouve pas de colonne spéciale pour  $\text{th } m$ ; ceci n'a pas d'inconvénient pour le problème direct quand  $m$  est donné, puisque

$$\log \text{th } m = \log \text{sh } m - \log \text{ch } m,$$

et que les deux nombres à retrancher se trouvent au moyen de la table, mais la solution du problème inverse est impraticable. Ensuite, l'intervention de l'angle auxiliaire  $\tau$  est parfaitement inutile, et l'on peut passer directement de  $\varphi$  à  $m$ . C'est ainsi qu'ont procédé Gronau<sup>(1)</sup> et Vassal<sup>(2)</sup>.

Soit  $\varphi'$  un angle. On calcule un argument hyperbolique  $x$  donné par

$$\text{sh } x = \text{tg } \varphi',$$

ou

$$\text{th } x = \sin \varphi',$$

et on en tire

$$x = \frac{1}{M} \log \text{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} \right).$$

En comparant cette seconde méthode à la précédente, on reconnaît de suite que pour  $\varphi' = 2\varphi$ , on a aussi  $x = 2m$ . Il ne reste qu'à inscrire à côté de l'angle  $\varphi'$ , et sur la même ligne, la valeur calculée de  $x$  dans une colonne additionnelle; sur cette même ligne se trouvent

$$\log \text{th } x = \log \sin \varphi';$$

$$\log \text{sh } x = \log \text{tg } \varphi',$$

$$\text{colog ch } x = \log \cos \varphi'.$$

(<sup>1</sup>) *Tafeln für sämtliche trigonometrische Functionen der cyklischen und hyperbolischen Sektoren*. Danzig, 1863. La table de J. Houël est extraite de la précédente.

(<sup>2</sup>) *Nouvelles Tables à 5 décimales*. Paris, 1872.

Dans la Table de Vassal, les logarithmes et arguments sont à 5 décimales; la dernière est accompagnée d'un astérisque quand le nombre dont elle fait partie est calculé par excès. Ayant refait tous les calculs avec une plus grande approximation, j'ai pu me convaincre que le cinquième chiffre des arguments n'était pas toujours exact. L'auteur s'est, en effet, simplement contenté, après avoir calculé un argument avec 6 ou 7 décimales, de supprimer les décimales postérieures à la cinquième, en forçant ou en ne forçant pas celle-ci d'une unité suivant le cas. Mais alors l'argument *inscrit* ne correspond plus exactement aux logarithmes qui sont sur sa ligne, et pour conserver de part et d'autre 5 décimales exactes, il eût fallu compléter le calcul par une interpolation.

Néanmoins, la Table de Vassal a le très grand avantage de pouvoir servir à la fois aux deux trigonométries circulaire et hyperbolique; il serait seulement désirable qu'on pût lui adjoindre une nouvelle table à arguments croissant régulièrement par progression arithmétique décimale, ainsi que cela se fait aujourd'hui pour les tables circulaires correspondant à la division en grades; l'approximation de  $\frac{1}{10^5}$  suffit et ne pourrait d'ailleurs être dépassée qu'en imposant à l'ouvrage un développement considérable et hors de propos.

I. *Sinus*. — Si  $x = \frac{1}{10^p}$ ,  $\text{sh } x = x$  par défaut avec une erreur moindre que  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{3p}}$ , et de même  $\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2}$  aussi par défaut avec une erreur inférieure à  $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{10^{4p}}$ . En utilisant cette remarque, on peut appliquer les formules de Simpson aux calculs approchés de  $\text{sh } mx$  et  $\text{ch } mx$ ; mais ce procédé ne vaut que pour les petits arguments puisque  $m$  croît indéfiniment; l'approximation des résultats décroît donc et tend à disparaître totalement.

Nous avons aussi des séries pour exprimer les développements de  $\log \text{sh } x$  et  $\log \text{ch } x$ , mais nous arriverons plus rapidement au but en partant, comme cela a été fait pour les fonctions circulaires, des expressions directes de  $\text{sh } x$  et  $\text{ch } x$  développées en séries.

Si l'on emploie les mêmes notations, on a, en remplaçant  $x$  par  $ix$ ,

$$U_1 = 1 + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!},$$

$$U_2 = 1 + \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{x^4}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)(2n+5)} \dots$$

$$U = U_1 + \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} U_2,$$

$$V_1 = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+2)(2n+3) - x^2},$$

$$V = U_1 + \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} V_1.$$

$T_2, T_3 \dots T_{p+1}$  ayant la même signification que précédemment, il en résulte

$$\frac{U}{V} = 1 + T_2 x^{2n+1} - T_3 x^{2n+6} \dots + (-1)^{p+1} T_{p+1} x^{2n+2p+2} \dots,$$

et

$$(12) \quad \operatorname{sh} x = x \cdot V \cdot \left( \frac{U}{V} \right),$$

avec

$$(13) \quad \log \operatorname{sh} x = \log x + \log V + \log \left( \frac{U}{V} \right).$$

$\frac{U}{V}$  est ici toujours plus petit que 1, c'est-à-dire de la forme  $1 - A$ ,  $A$  désignant une suite alternée dont le premier terme  $a$  est positif. Si donc on calcule une limite supérieure  $N$  par la formule (7), pour toute valeur de  $x$  inférieure à  $N$ ,  $\log \frac{U}{V}$  est en valeur absolue inférieur à  $\frac{1}{10^{k+1}}$  et l'équation

$$(14) \quad \log \operatorname{sh} x = \log x + \log V$$

donne par conséquent  $\log \operatorname{sh} x$  par excès avec  $K$  chiffres décimaux. Comme  $K$  est donné d'avance et invariable, on fera croître progressive-

ment  $n$  pour élever de plus en plus la limite  $N$ . Avec la supposition  $K = 5$ , le calcul donne pour

$$(15) \quad \begin{cases} n = 1, & N = 0,46832, \\ n = 2, & N = 1,01979, \\ n = 3, & N = 1,6753, \\ n = 4, & N = 2,3876. \end{cases}$$

II. *Cosinus*. — Servons-nous encore des mêmes notations que pour  $\cos x$ , de sorte que

$$U_1' = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}.$$

$$U_2' = 1 + \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{x^4}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)} + \dots,$$

$$U' = U_1' + \frac{x^{2n}}{2n!} U_2',$$

$$V_1' = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+1)(2n+2) - x^2},$$

$$V' = U_1' + \frac{x^{2n}}{2n!} V_1',$$

et

$$(16) \quad \operatorname{ch} x = V' \left( \frac{U'}{V'} \right).$$

Comme d'ailleurs

$$\frac{U'}{V'} = 1 + T_2' x^{2n+4} - T_3' x^{2n+6} \dots + (-1)^{p+1} T_{p+1}' x^{2n+2p+2} \dots$$

est encore une suite alternée moindre que 1, quand  $x$  est inférieur à la limite  $N'$  que l'on tire de la formule (9),  $\log \left( \frac{U'}{V'} \right)$  est en valeur absolue moindre que  $\frac{1}{10^{k+1}}$ ; sous cette réserve l'on peut encore écrire

$$(17) \quad \log \operatorname{ch} x = \log V',$$

et calculer de cette façon à moins de  $\frac{1}{10^k}$  par excès, le logarithme de  $\operatorname{ch} x$ .



Dans la supposition  $K = 5$ , le calcul donne

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} n = 1, & N' = 0,32154, \\ n = 2, & N' = 0,75637, \\ n = 3, & N' = 1,29987, \\ n = 4, & N' = 1,94858. \end{array} \right.$$

III. *Calcul des logarithmes hyperboliques.* — Pour calculer une table de logarithmes des fonctions hyperboliques à 5 décimales, nous pourrons donc faire usage des formules suivantes :

$$\begin{aligned} n = 1 \ (a) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \log \operatorname{sh} x = \log x + \log \frac{60 + 7x^2}{60 - 3x^2}, \\ \log \operatorname{ch} x = \log \frac{12 + 5x^2}{12 - x^2} \end{array} \right. \\ n = 2 \ (b) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \log \operatorname{sh} x = \log x + \log \frac{5040 + 720x^2 + 22x^4}{5040 - 120x^2}, \\ \log \operatorname{ch} x = \log \frac{120 + 56x^2 + 3x^4}{120 - 4x^2} \end{array} \right. \\ n = 3 \ (c) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \log \operatorname{sh} x = \log x + \frac{\log 60480 + 9240x^2 + 364x^4 + 5x^6}{60480 - 840x^2}, \\ \log \operatorname{ch} x = \log \frac{40320 + 19440x^2 + 1320x^4 + 26x^6}{40320 - 720x^2}, \end{array} \right. \end{aligned}$$

en empruntant à un de ces groupes la formule compatible avec la position de  $x$  à l'égard des limites  $N$  et  $N'$  inscrites dans les tableaux (15) et (18). Par exemple, pour la valeur  $x = 1$  nous prendrons  $\operatorname{sh} x$  dans le groupe (b) et  $\operatorname{ch} x$  dans le groupe (c), et nous trouverons

$$\log \operatorname{sh} x = \log \frac{5782}{4920} = 0,07011,$$

$$\log \operatorname{ch} x = \log \frac{61106}{39600} = 0,18839,$$

d'où

$$\operatorname{sh} 1 = 1,1752,$$

$$\operatorname{ch} 1 = 1,5431,$$

nombres identiques à un dix-millième près à ceux que donne le calcul direct en partant de

$$e = 2,71828,$$

$$\frac{1}{e} = 0,36788.$$

Nous allons maintenant fixer avec quelques détails les conditions d'établissement de la table que nous voulons construire. En premier lieu, les logarithmes devant avoir cinq chiffres décimaux, nous ferons croître les arguments de cent millième en cent millième depuis zéro jusqu'à 0,01, de dix millième en dix millième de 0,01 à 1, et enfin de millième en millième à partir de 1 jusqu'aux limites les plus élevées; le procédé pratique de calcul pourra varier selon qu'il s'agit des petits arguments ou des arguments moyens.

*Petits arguments.* — Nous donnons ce nom à ceux qui, étant inférieurs à 0,32154, relèvent uniquement des formules (a), et par suite pour lesquels nous avons

$$V = \frac{60 + 7x^2}{60 - 3x^2}, \quad V' = \frac{12 + 5x^2}{12 - x^2}.$$

Si nous calculons V et V' pour les valeurs 0,3214 et 0,3215, nous trouvons dans le premier cas

$$\log V = 0,00745, \quad \log V' = 0,02206,$$

et dans le deuxième

$$\log V = 0,00746, \quad \log V' = 0,02207.$$

Par conséquent V et V' varient peu, et au-dessous de la limite indiquée il y a avantage à rechercher les arguments qui répondent à une valeur donnée de V et de V'.

En posant

$$P = \frac{60 + 7x^2}{60 - 3x^2}, \quad P' = \frac{12 + 5x'^2}{12 - x'^2},$$

x et x' sont donnés par les formules

$$(19) \quad x = \sqrt{\frac{60(P-1)}{7+3P}}, \quad x' = \sqrt{\frac{12(P'-1)}{P'+5}}.$$

Soit  $q$  un entier donné; calculons les nombres  $P_1, P_2, P_3$  qui ont pour logarithmes respectifs

$$\frac{10q}{10^6}, \quad \frac{10q+5}{10^6} \quad \text{et} \quad \frac{10(q+1)}{10^6}.$$

En remplaçant  $P$  par chacun de ces nombres, la première formule (19) donne trois valeurs croissantes  $x_1, x_2, x_3$  de  $x$ ; pour tout argument au moins égal à  $x_1$  et inférieur à  $x_2$ ,  $\log V$  vaut  $\frac{q}{10^6}$  par défaut, tandis que pour tout argument au moins égal à  $x_2$  et inférieur à  $x_3$ , ce même logarithme vaut  $\frac{q+1}{10^6}$  par excès. Si de même dans la 2<sup>e</sup> formule (19)  $P'$  est remplacé tour à tour par  $P_1, P_2$  et  $P_3$ , on calcule trois nouveaux arguments aussi croissants  $x'_1, x'_2, x'_3$  entre lesquels le logarithme de  $V'$  est successivement égal à  $\frac{q}{10^6}$  par défaut ou à  $\frac{q+1}{10^6}$  par excès.

Or, si l'on remarque que, d'après ce qui précède,  $q$  ne dépasse pas 2207,  $P$  est toujours voisin de 1, et sa différence avec 1 ne dépasse pas un centième.

Désignons par  $u$  le logarithme donné de  $P$ ,  $u$  est de la forme

$$u = \frac{10q+r}{10^6},$$

$r$  étant 0 ou 5.

Nous avons donc, d'après la série connue,

$$P = 10^u = 1 + uL10 + \frac{u^2(L10)^2}{2!} + \dots + \frac{u^3(L10)^3}{3!} + \dots$$

Pour les valeurs de  $q$  inférieures à 170,  $\frac{u^3(L10)^3}{3!}$  est moindre que  $\frac{1}{10^6}$ , le terme suivant est moindre que  $\frac{1}{10^{12}}$ , et les suivants décroissent plus rapidement encore; donc, en se limitant aux unités décimales du 8<sup>e</sup> ordre,

$$(20) \quad P = 1 + uL10 + \frac{u^2(L10)^2}{2!} = 1 + m.$$

Il en résulte

$$7 + 3P = 10 \left( 1 + \frac{3m}{10} \right),$$

$$25 + 5P' = 30 \left( 1 + \frac{m}{6} \right),$$

et par suite

$$\log x = \frac{1}{2} \left[ \log 60m - 1 - \log \left( 1 + \frac{3m}{10} \right) \right]$$

$$\log x' = \frac{1}{2} \left[ \log 60m - \log 30 - \log \left( 1 + \frac{m}{6} \right) \right].$$

Mais il est facile de s'assurer, pour les valeurs très petites de  $q$ , que l'on a

$$\log \left( 1 + \frac{3m}{10} \right) = \frac{3q}{10^6}, \quad \log \left( 1 + \frac{m}{6} \right) = \frac{1}{6} \frac{q}{10^6}$$

avec une erreur moindre que  $\frac{1}{10^6}$ , donc

$$\log x = \frac{1}{2} \left[ \log 60m - \left( 1 + \frac{3q}{10^6} \right) \right],$$

$$\log x' = \frac{1}{2} \left[ \log 60m - \log 30 - \frac{q}{6 \cdot 10^6} \right].$$

Ceci posé, pour les trois logarithmes consécutifs  $u_1, u_2, u_3$  qui diffèrent entre eux de  $\frac{5}{10^6}$ , on a

$$\log x_1 = \frac{1}{2} \left[ \log 60m_1 - 1 - \frac{30q}{10^7} \right], \quad \log x'_1 = \frac{1}{2} \left[ \log 60m_1 - \log 30 - \frac{10q}{6 \cdot 10^6} \right]$$

$$\log x_2 = \frac{1}{2} \left[ \log 60m_2 - 1 - \frac{30q + 15}{10^7} \right], \quad \log x'_2 = \frac{1}{2} \left[ \log 60m_2 - \log 30 - \frac{10q + 5}{6 \cdot 10^6} \right]$$

$$\log x_3 = \frac{1}{2} \left[ \log 60m_3 - 1 - \frac{30(q + 1)}{10^7} \right], \quad \log x'_3 = \frac{1}{2} \left[ \log 60m_3 - \log 30 - \frac{10(q + 1)}{6 \cdot 10^6} \right]$$

Donc pour passer de  $\log x_1$  à  $\log x_2$ , il suffit d'augmenter la partie soustractive de 15 unités du 7<sup>e</sup> ordre décimal, et il en est de même pour le passage de  $\log x_2$  à  $\log x_3$ . De même entre  $x'_1, x'_2$  et  $x'_3$ .

la partie soustractive augmente à chaque opération nouvelle de  $\frac{5}{6 \cdot 10^6} = 8,33$  unités du 7<sup>e</sup> ordre décimal; en résumé, dans chaque calcul, il n'y a réellement que le logarithme de 60 *m* à chercher de nouveau.

Nous allons d'ailleurs montrer que quand on a calculé par la formule (20) une valeur de *P*, il est facile de calculer à l'aide des différences première et seconde les valeurs suivantes. En effet, soit  $\Delta u = \frac{5}{10^6}$  l'augmentation de *u*: nous avons

$$\Delta P = \Delta u L10 + u \Delta u (L10)^2 + \frac{1}{2} (\Delta u)^2 (L10)^2$$

et comme

$$\frac{1}{2} (\Delta u)^2 (L10)^2 = \frac{25}{2} \frac{(L10)^2}{10^{12}} < \frac{1}{10^{10}}$$

jusqu'aux unités du 8<sup>e</sup> ordre décimal, on a

$$\Delta P = \Delta u L10 + u \Delta u (L10)^2.$$

En second lieu,

$$\Delta^2 P = (\Delta u)^2 (L10)^2 = \frac{0,013}{10^8}.$$

Par suite, si *P*<sub>1</sub> est préalablement calculé, on a

$$P_2 = P_1 + \Delta P_1 = P_1 + \Delta u L10 + u_1 \Delta u (L10)^2,$$

$$\Delta P_2 = \Delta P_1 + \frac{0,013}{10^8},$$

et

$$P_3 = P_2 + \Delta P_2.$$

Au début du calcul, *u*<sub>1</sub> = 0 et *P*<sub>1</sub> = 0, donc

$$\Delta P_1 = \Delta u L10 = \frac{1151,292}{10^8}$$

Nous avons calculé par la méthode précédente les valeurs des limites *N* et *N'* pour toutes les valeurs entières de *q* de 0 à 30, en leur conservant cinq décimales; le tableau en est dressé ci-après.

$q$	$\log V = \log V'$	$N$	$N'$
0	0,00000	0,00000	0,00000
	0,00001	0,00831	0,00479
1	0,00001	0,01177	0,00678
	0,00002	0,01439	0,00831
2	0,00002	0,01662	0,00960
	0,00003	0,01858	0,01073
3	0,00003	0,02036	0,01175
	0,00004	0,02198	0,01269
4	0,00004	0,02351	0,01357
	0,00005	0,02493	0,01439
5	0,00005	0,02628	0,01517
	0,00006	0,02756	0,01591
6	0,00006	0,02879	0,01662
	0,00007	0,02996	0,01730
7	0,00007	0,03110	0,01795
	0,00008	0,03219	0,01858
8	0,00008	0,03324	0,01919
	0,00009	0,03427	0,01978
9	0,00009	0,03526	0,02036
	0,00010	0,03623	0,02091
10	0,00010	0,03717	0,02146
	0,00011	0,03808	0,02198
11	0,00011	0,03898	0,02250
	0,00012	0,03985	0,02301
12	0,00012	0,04071	0,02351
	0,00013	0,04155	0,02399
13	0,00013	0,04238	0,02446
	0,00014	0,04318	0,02493
14	0,00014	0,04397	0,02539
	0,00015	0,04475	0,02583
15	0,00015	0,04552	0,02628
	0,00016	0,04628	0,02671
16	0,00016	0,04701	0,02714
	0,00017	0,04774	0,02756
17	0,00017	0,04846	0,02798
	0,00018	0,04917	0,02839
18	0,00018	0,04987	0,02879
	0,00019	0,05055	0,02919
19	0,00019	0,05123	0,02958
	0,00020	0,05190	0,02996
20	0,00020	0,05256	0,03035
	0,00021	0,05322	0,03072
21	0,00021	0,05386	0,03110
	0,00022	0,05450	0,03147
22	0,00022	0,05513	0,03183
	0,00023	0,05575	0,03219
23	0,00023	0,05637	0,03254
	0,00024	0,05697	0,03289
24	0,00024	0,05757	0,03324
	0,00025	0,05818	0,03359
25	0,00025	0,05877	0,03393
	0,00026	0,05935	0,03427
26	0,00026	0,05993	0,03461
	0,00027	0,06051	0,03493
27	0,00027	0,06107	0,03526
	0,00028	0,06164	0,03559
28	0,00028	0,06220	0,03591
	0,00029	0,06275	0,03623
29	0,00029	0,06330	0,03654
	0,00030	0,06384	0,03685
30	0,00030	0,06437	0,03717

On peut l'employer à la recherche du sinus et du cosinus hyperbolique d'un argument moindre que 0,03717. Soit, par exemple,  $x = 0,02589$ . Ce nombre est compris entre 0,02493 et 0,02628 de la colonne N, puis entre 0,02583 et 0,02628 de la colonne N' ; donc

$$\log V = 0,00005 \text{ à } \frac{1}{10^5} \text{ par excès}$$

et comme

$$\log 0,02589 = \bar{2},41313,$$

on en déduit par addition

$$\log \operatorname{sh} 0,02589 = \bar{2},41318$$

puis

$$\log V' = \log \operatorname{ch} 0,02589 = 0,00015.$$

Quand on compare les colonnes N et N', on remarque que tous les nombres consécutifs de la première sont reproduits dans la deuxième de trois en trois rangs. Nous allons en donner une explication qui permet de vérifier les deux colonnes l'une par l'autre. Lorsqu'en effet  $q$  est inférieur à 10, aux unités du 8<sup>e</sup> ordre près, on a

$$P = 1 + \frac{10q}{10^6 M} = 1 + m,$$

$$x = \sqrt{\frac{60m}{10 + 3m}};$$

remplaçons  $q$  par  $3q$ ,  $P$  par  $P'$ , et  $x$  par  $x'$ ; il vient

$$P' = 1 + 3m,$$

$$x' = \sqrt{\frac{60m}{10 + 5m}};$$

donc,

$$\log x - \log x' = \frac{1}{2} \left[ \log \left( 1 + \frac{5}{10} m \right) - \log \left( 1 + \frac{3}{10} m \right) \right] = \frac{mM}{10},$$

et cette différence est moindre que  $\frac{1}{10^6}$  quand  $m$  est inférieur à  $\frac{1}{M \cdot 10^4}$  ou  $q$  inférieur à 10.

Lorsque  $q$  est supérieur à 170, le terme  $\frac{u^3(L10)^3}{3!}$  devenant supérieur à  $\frac{1}{10^8}$  ne peut plus se négliger, et le calcul de  $P$  par les différences successives se complique par la nécessité d'employer les différences troisièmes. Il est préférable de calculer directement  $\log V$  et  $\log V'$  par les formules (a), dans lesquelles cette fois on se donne  $x$ . D'ailleurs, puisque  $\Delta x = 0,0001$  est constant, il peut être encore avantageux d'introduire des différences, en déterminant  $\Delta \log V$  et  $\Delta \log V'$ .

Posons

$$\log(1 + \alpha x^2) = X = M \left( \alpha x^2 - \frac{\alpha^2 x^4}{2} + \frac{\alpha^3 x^6}{3} \dots \right)$$

et admettons que ce logarithme ait été calculé exactement pour une certaine valeur de  $x$ .

Nous avons

$$\Delta X = A \Delta x + B(\Delta x)^2 + \dots$$

en posant

$$A = 2M\alpha x (1 - \alpha x^2 + \alpha^2 x^4 - \alpha^3 x^6 \dots) = \frac{2M\alpha x}{1 + \alpha x^2},$$

$$B = M\alpha(1 - 3\alpha x^2 + 5\alpha^2 x^4 \dots).$$

Les valeurs de  $\alpha$  considérées dans notre calcul,  $x$  étant moindre que 1,

$$\alpha = \frac{7}{60}, \quad -\frac{3}{60}, \quad \frac{5}{12}, \quad -\frac{1}{12}$$

sont telles que  $B$  demeure toujours inférieur à  $\frac{1}{100}$ . Donc, à moins de  $\frac{1}{10^{10}}$  nous pouvons avoir

$$\Delta X = \frac{2M\alpha x}{1 + \alpha x^2} \Delta x.$$

Il en résulte que  $\frac{x}{1 + \alpha x^2}$  étant calculé avec 2 décimales exactes,  $\Delta X$  sera connu avec 6 décimales exactes, et  $X$ ,  $V$ ,  $V'$  le seront avec 5.

Exemple : Pour  $x = 0,1$  les formules (a) donnent directement

$$\log \operatorname{sh} 0,1 = \bar{1} + \log \frac{60,07}{59,97} = \bar{1},000723 \text{ ou } \bar{1},00072$$

$$\log \operatorname{ch} 0,1 = \log \frac{12,05}{11,99} = 0,002077 \text{ ou } 0,00208.$$



$$\begin{aligned}
 \text{Pour } \alpha &= \frac{7}{60}, & \frac{2M\alpha x}{1 + \alpha x^2} &= 0,01, \\
 \alpha &= \frac{5}{12}, & \frac{2M\alpha x}{1 + \alpha x^2} &= 0,03, \\
 \alpha &= -\frac{3}{60}, & \frac{2M\alpha x}{1 + \alpha x^2} &= -0,004, \\
 \alpha &= -\frac{1}{60}, & \frac{2M\alpha x}{1 + \alpha x^2} &= -0,007.
 \end{aligned}$$

Par suite, pour  $x = 0,1001$ ,

$$\begin{aligned}
 \Delta \log V &= 0,000001 + 0,0000004 = 0,000001, \\
 \Delta \log V' &= 0,000003 + 0,0000007 = 0,000004,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \log \operatorname{sh} 0,1001 &= \bar{1},000434 + 0,000723 + 0,000001, \\
 &= \bar{1},001158 \text{ ou } \bar{1},00116, \\
 \log \operatorname{ch} 0,1001 &= 0,002077 + 0,000004 \\
 &= 0,002081 \text{ ou } 0,00208.
 \end{aligned}$$

*Moyens et grands arguments.* — Pour trouver les logarithmes hyperboliques des arguments supérieurs à 0,32154, on sera amené à substituer les formules (b) ou (c) aux formules (a) en y introduisant directement les valeurs successives de  $x$ ; mais, qu'il s'agisse d'arguments petits ou grands, les produits partiels sont identiques à la position de la virgule près, et les calculs faits pour les premiers pourront servir pour les autres.

Comme il importe de soumettre tous les résultats à une vérification régulière, nous adopterons dans ce but la méthode de Gronau et Vassal, en la complétant par les interpolations indispensables. Eclaircissons ceci par un exemple.

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } \varphi' = 49^\circ 36', \quad \frac{1}{M} \log \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} \right) &= \frac{1}{M} \times 0,4342367, \\
 &= 0,9998669.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } \varphi' = 49^\circ 36' 20'', \quad \frac{1}{M} \log \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} \right) &= \frac{1}{M} \times 0,4343017, \\
 &= 1,0000166.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, au moyen de la table circulaire, nous trouvons

$$\log \operatorname{sh} 0,9998669 = 0,0700364,$$

$$\log \operatorname{sh} 1,0000166 = 0,0701217,$$

et de même

$$\log \operatorname{ch} 0,9998669 = 0,1883445,$$

$$\log \operatorname{ch} 1,0000166 = 0,1883941.$$

Par l'interpolation proportionnelle, nous avons donc les résultats suivants :

$$\log \operatorname{sh} 1 = 0,0701123,$$

$$\log \operatorname{ch} 1 = 0,1883919,$$

qui, réduits à 5 décimales, deviennent

$$\log \operatorname{sh} 1 = 0,07011,$$

$$\log \operatorname{ch} 1 = 0,18839,$$

ainsi que nous l'avions précédemment calculé par les formules abrégées.

Nous donnons ci-contre le spécimen d'une page de la table de logarithmes des fonctions hyperboliques pour les arguments croissant par millième de 1,900 à 1,950. La cotangente hyperbolique étant inutile, nous n'avons inscrit que les colonnes Sh, Ch, et Th. Les logarithmes dont le dernier chiffre est en caractère gras sont pris par excès.

A	Sh	D	Ch	D	Th	D
1,900	0,51430	45	0,53374	41	1,98057	3
1	476	et	415	et	060	et
2	521	46	457	42	064	4
3	567		498		068	
4	612		540		072	
5	657		582		076	
6	703		623		080	
7	748		665		084	
8	793		706		087	
9	839		748		091	
1,910	884		789		095	
1	930		831		099	
2	0,51975		872		103	
3	0,52020		914		107	
4	066		956		110	
5	111		0,53997		114	
6	157		0,54039		118	
7	202		080		122	
8	247		122		125	
9	293		164		129	
1,920	338		205		133	
1	383		247		137	
2	428		289		140	
3	474		330		144	
4	519		371		148	
5	564		413		151	
6	610		455		155	
7	655		496		159	
8	701		538		163	
9	746		580		166	
1,930	791		621		170	
1	836		663		173	
2	881		705		177	
3	927		746		181	
4	0,52972		788		184	
5	0,53018		830		188	
6	063		871		192	
7	108		913		195	
8	153		955		199	
9	199		0,54996		202	
1,940	244		0,55038		206	
1	289		080		210	
2	334		121		213	
3	380		163		217	
4	425		205		220	
5	470		246		224	
6	515		288		227	
7	561		330		231	
8	606		371		235	
9	651		413		238	
1,950	0,53696		0,55455		1,98242	

# SUR LA DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES CANONIQUES

DES

Substitutions orthogonales à  $n$  variables

**Par M. B. ÉLIE**

DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AU COLLÈGE D'ARBEVILLE

## § 1. — Définitions.

Considérons une substitution orthogonale de coefficients  $\alpha_{hk}$  entre deux systèmes de variables  $u_h$  et  $z_h$  (avec  $h = 1, 2, \dots, n$ ). Elle est définie par les égalités :

$$(1) \quad u_h = \alpha_{h1}z_1 + \alpha_{h2}z_2 + \dots + \alpha_{hn}z_n.$$

On sait que les  $n^2$  coefficients  $\alpha_{hk}$  étant liés par  $\frac{n(n+1)}{2}$  équations sont exprimables à l'aide de  $\frac{n(n-1)}{2}$  paramètres. C'est le choix de ces paramètres et leurs relations avec les coefficients  $\alpha$  qui font l'objet de cette note.

Pour  $n = 2$ , il n'y a qu'un paramètre  $\omega$ , car on peut poser :

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \omega & \alpha_{12} &= \sin \omega \\ \alpha_{21} &= -\sin \omega & \alpha_{22} &= \cos \omega. \end{aligned}$$

Pour  $n = 3$ , il y en a trois, et, dans les applications à la géométrie, ce seront, par exemple, les angles d'Euler. Mais on peut aussi adopter ceux proposés par O. Rodrigues. Comme mon but est de généraliser ces derniers pour un espace à  $n$  dimensions, je rappelle leur définition géométrique. On désigne par  $f_1, f_2, f_3$  les cosinus des angles que fait avec les axes d'un système de coordonnées rectangulaires la droite autour de laquelle ce système doit tourner pour se superposer à un

autre système d'axes, par  $\theta$  l'angle de rotation. Si on pose pour abréger :

$$V = 1 - \cos \theta,$$

les neuf coefficients  $\alpha$  sont :

$$(2) \quad \begin{cases} Vf_1^2 + \cos \theta & Vf_1f_2 + f_3 \sin \theta & Vf_1f_3 - f_2 \sin \theta \\ Vf_2f_1 - f_3 \sin \theta & Vf_2^2 + \cos \theta & Vf_2f_3 + f_1 \sin \theta \\ Vf_3f_1 + f_2 \sin \theta & Vf_3f_2 - f_1 \sin \theta & Vf_3^2 + \cos \theta \end{cases}$$

et les valeurs de  $u_1, u_2, u_3$  sont :

$$(2)' \quad \begin{aligned} u_1 &= (Vf_1^2 + \cos \theta)z_1 + Vf_1f_2z_2 + Vf_1f_3z_3 \\ &\quad + \sin \theta(0 + f_3z_2 - f_2z_3) \end{aligned} \quad u_2 = \dots$$

Dans le cas de  $n$  quelconque, Cayley (1), en suivant une voie tracée par Euler lorsque  $n = 4$ , a pu exprimer les  $\alpha$  en fonction rationnelle de  $\frac{n(n-1)}{2}$  paramètres. Désignons par  $b_{hk}$  ces paramètres qui devront vérifier :

$$b_{hk} + b_{kh} = 0, \quad b_{hh} = 0,$$

par  $\omega$  une constante arbitraire, par  $B$  leur déterminant, par  $\beta_{hk}$  ses mineurs; les valeurs des  $x$  sont alors :

$$x_{hh} = \frac{2\omega\beta_{hh}}{B} - 1 \quad x_{hk} = \frac{2\omega\beta_{hk}}{B}.$$

Si on adopte cette solution, on a le désavantage de rencontrer de grandes difficultés dans la résolution du problème inverse : trouver les expressions des paramètres  $b$  en fonction des coefficients  $\alpha$ . De plus, on ne voit pas la signification géométrique de ces paramètres. Je vais montrer qu'en généralisant les formes (2) et (2)' de Rodrigues, on arrive à de meilleurs résultats et que, dans le cas où  $n$  est impair, elles donnent une solution élégante de la question.

(1) *Journal de Crelle*, t. XXXII.

Comme la méthode et les résultats vont présenter de grandes différences suivant la parité de  $n$ , il m'a semblé plus commode de traiter séparément les deux cas de  $n$  impair ou  $n$  pair, en commençant par le premier qui est le plus simple.

## § 2. — Cas de $n$ impair.

L'examen de l'égalité (2)' nous conduit à décomposer la substitution (1) en la somme de deux autres dont les déterminants seront, symétrique pour la première, symétrique gauche pour la seconde, et par suite à poser :

$$u_h = x_h + y_h$$

$$(3) \quad x_h = \frac{\alpha_{h1} + \alpha_{1h}}{2} z_1 + \frac{\alpha_{h2} + \alpha_{2h}}{2} z_2 + \dots + \alpha_{hh} z_h + \dots + \frac{\alpha_{hn} + \alpha_{nh}}{2} z_n$$

$$(3)' \quad y_h = \frac{\alpha_{h1} - \alpha_{1h}}{2} z_1 + \frac{\alpha_{h2} - \alpha_{2h}}{2} z_2 + \dots + 0 \quad + \dots + \frac{\alpha_{hn} - \alpha_{nh}}{2} z_n;$$

l'examen des expressions (2), à écrire :

$$(4) \quad \alpha_{hh} = V f_h^2 + \cos \theta$$

$$(4)' \quad \alpha_{hk} = V f_h f_k + p_{hk} \sin \theta.$$

Les  $f_h$  seront encore les composants d'un vecteur unité (mais à  $n$  dimensions) vérifiant l'égalité :

$$(5) \quad \sum f_h^2 = 1.$$

Les nouvelles quantités introduites devront satisfaire à :

$$(5)' \quad p_{hk} + p_{kh} = 0, \quad p_{hh} = 0, \quad \frac{\alpha_{hk} - \alpha_{kh}}{2 \sin \theta} = p_{hk}.$$

Il faut maintenant chercher les relations qui doivent exister entre les quantités  $p$ ,  $f$  et  $V$ , pour que les expressions (4) et (4)' proposées pour les coefficients  $\alpha$  satisfassent aux conditions d'une substitution orthogonale, à savoir :

$$(a) \quad \sum \alpha_{kk} = 1 \quad (h' \pm h).$$

$$(a)' \quad \sum \alpha_{hk} \alpha_{h'k} = 0.$$

Les calculs étant un peu longs, mais très élémentaires, je ne ferai qu'indiquer les résultats. Les conditions (a) seront satisfaites si on annule dans chacune d'elles les facteurs de  $\sin \theta$ , ce qui donne les  $n$  égalités :

$$(6) \quad f_1 p_{h1} + f_2 p_{h2} + \dots + f_n p_{hn} = 0,$$

dont la forme explicite est :

$$(6)' \quad \begin{aligned} & 0 + f_1 p_{12} + f_3 p_{13} + \dots + f_n p_{1n} = 0 \\ & -f_1 p_{12} + 0 + f_3 p_{23} + \dots + f_n p_{2n} = 0 \\ & -f_1 p_{13} - f_2 p_{23} + 0 + \dots + f_n p_{3n} = 0 \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

et si, de plus, on suppose :

$$(7) \quad p_{h1}^2 + p_{h2}^2 + \dots + p_{hn}^2 = 1 - f_h$$

De ce dernier système, on déduit immédiatement :

$$(7)' \quad \sum (p_{hh}^2 + p_{kh}^2) = n - 1.$$

Les conditions (a)' seront satisfaites si aux systèmes précédents (6) et (7) on adjoint les  $\frac{n(n-1)}{2}$  égalités :

$$(8) \quad p_{h1} p_{k1} + p_{h2} p_{k2} + \dots + p_{hn} p_{kn} = -f_h f_k.$$

Sur ces trois groupes d'équations (6), (7) et (8) je ferai les remarques suivantes : en premier lieu, ils sont indépendants de l'angle  $\theta$ . Ensuite, les premiers membres de (7) et (8) sont les termes du déterminant qu'on obtiendrait en élevant au carré le déterminant relatif aux équations (6)'. Enfin, chose importante, ils n'ont de sens qu'autant que les valeurs des  $f$  déduites du groupe (6)' ne sont pas nulles. Ceci n'aura lieu que si le déterminant de ce groupe est nul, et il faut pour cela que  $n$  soit impair. C'est là le fait algébrique qui oblige de traiter d'une façon distincte les cas de  $n$  pair ou impair.

Il ne reste plus qu'à établir que ces égalités au nombre de  $\frac{n(n-1)}{2} + 2n$  sont compatibles. Pour cela, choisissons  $n$  égalités du groupe (8) pour lesquelles  $h$  a la même valeur ; multiplions respectivement chacune d'elles par  $p_{k1}$ ,  $p_{k2}$ , ..., et ajoutons-les. Dans la somme

obtenue, les termes du premier membre se détruisent deux à deux, tandis que le deuxième membre est nul d'après l'une des égalités (6).

D'autre part, additionnons la somme des carrés des premiers membres du groupe (6); remplaçons les sommes des carrés et des produits formés avec les lettres  $p$  par leurs valeurs données par les groupes (7) et (8), et nous trouvons une somme nulle.

Nous concluons qu'en généralisant les formules de Rodrigues le problème de Cayley et son inverse sont complètement résolus. Car si on se donne les  $\frac{n(n-1)}{2}$  quantités  $p$  liées par l'équation (7)' et l'angle  $\theta$ , ce qui constitue  $\frac{n(n-1)}{2}$  paramètres indépendants, les  $f$  se déduiront des équations (6) et les coefficients  $\alpha$  seront donnés par les égalités (4) et (4)'.

Si, au contraire, on se donne les coefficients  $\alpha$ , on déterminera les  $p$  et  $\theta$  par les égalités :

$$\sin \theta = \frac{\alpha_{12} - \alpha_{21}}{p_{12}} = \frac{\alpha_{hk} - \alpha_{kh}}{p_{hk}} = \frac{\left[ \sum (\alpha_{hk} - \alpha_{kh})^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{n-1}.$$

Comme exemple, prenons le cas de  $n = 3$ .

De (7)' on déduit :

$$p_{12}^2 + p_{23}^2 + p_{31}^2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

et des (6)' :

$$\frac{f_1}{p_{23}} = \frac{f_2}{p_{13}} = \frac{f_3}{p_{12}} = 1.$$

Soit ensuite  $n = 5$ . La seule difficulté consiste à déduire les  $f$  des équations (6)'. Mais, par la théorie des déterminants, on sait qu'ils sont proportionnels aux racines carrées des mineurs relatifs aux termes de la diagonale du déterminant de ces équations (6)'. Ces mineurs sont des déterminants dissymétriques du degré pair et par suite des carrés parfaits. Ainsi, le déterminant correspondant à  $f_3$  sera :

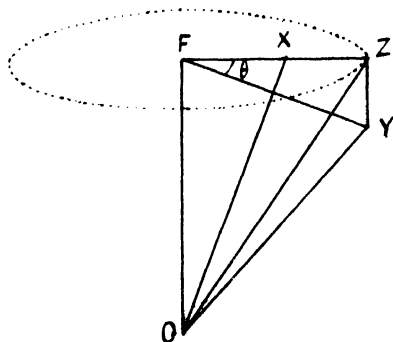
$$\begin{vmatrix} 0 & p_{14} & p_{13}p_{14} \\ -p_{12} & 0 & p_{23}p_{34} \\ -p_{13} - p_{23} & 0 & p_{34} \\ -p_{14} - p_{24} - p_{34} & 0 & 0 \end{vmatrix} = (p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{23}p_{34})^2.$$



### § 3. — Interprétation géométrique des équations précédentes.

Il est évident que les équations (6)' représentent des plans (à  $n - 1$  dimensions) se coupant suivant une droite (à une dimension) dont les cosinus directeurs sont les  $f$ , que j'appellerai axe de rotation et que je désignerai par OF.

Chaque plan contient un des axes de coordonnées. Les cosinus directeurs de sa normale sont les  $p$ ; l'angle des deux normales a pour cosinus  $-f_h f_k$ .



Comme les vecteurs que nous considérerons sont dans trois plans rectangulaires, nous pouvons les représenter par une figure à trois dimensions.

Soit dans cette figure O l'origine des coordonnées sur l'axe de rotation ;

$$X, Y, Z$$

les points ayant pour coordonnées respectives :

$$x_h, y_h, z_h. \quad \text{éq. (3) et (3)'}$$

Considérons les lettres (sans indices)

$$f, x, y, z$$

comme des symboles représentatifs des vecteurs dont les projections sont respectivement :

$$f_h x_h, y_h, z_h \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Je vais démontrer que le vecteur  $y$  est perpendiculaire aux trois vecteurs  $z$ ,  $f$  et  $x$ . On a, en effet, d'après (4)' et (3)',

$$(9) \quad y_h = (p_{h1}z_1 + p_{h2}z_2 + \dots + p_{hn}z_n) \sin \theta.$$

On en déduit immédiatement la condition pour que les vecteurs  $y$  et  $z$  soient perpendiculaires :

$$y_1z_1 + y_2z_2 + \dots + y_nz_n = 0,$$

On a aussi, en utilisant les égalités (6)',

$$y_1f_1 + y_2f_2 + \dots + y_nf_n = 0$$

et enfin, par les expressions (3) et (3'),

$$y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n = 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Démontrons ensuite que les points X et Z se projettent au même point F sur l'axe de rotation. En effet, la projection de OZ sur cet axe est :

$$(10) \quad f_1z_1 + f_2z_2 + \dots + f_nz_n = OF,$$

celle de OX sur ce même axe est :

$$f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n$$

que l'on trouve égale à OF si on y substitue la valeur :

$$(11) \quad x_h = V f_h OF + z_h \cos \theta$$

tirée des (3) et (4).

Ce sont ces propositions que la figure met en évidence pour l'un des *n* <sup>idées</sup> rectangles dont OF est l'arête commune. Outre les relations de situation entre ces divers vecteurs, il faut de plus connaître les relations de grandeurs.

Les égalités (11) nous donneront après quelques transformations :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{OX}^2 &= \sum x_h^2 = \cos^2 \theta \sum z_h^2 + \sin^2 \theta \sum f_h z_h \\ &= \overline{OZ}^2 \cos^2 \theta + \overline{OF}^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \right.$$

Par les égalités (9), on aura :

$$\overline{ZY}^2 = \sum y_h^2 = \sin^2 \theta \left( \sum y_h^2 - \sum f_h z_h \right) = \sin^2 \theta (\overline{OZ}^2 - \overline{OF}^2) = \sin^2 \theta \overline{FZ}^2$$

et comme l'angle FZY est droit, on voit que l'angle  $\theta$  n'est autre que YFZ.

Cherchons les lieux des points Y et X extrémités des vecteurs relatifs aux substitutions symétrique et gauche (3) et (3)' lorsque le point Z décrit une sphère de rayon unité et de centre O.

La figure nous donne :

$$FY = \frac{FZ}{\cos \theta}$$

Le point Y décrit donc un ellipsoïde dont le rayon polaire dirigé suivant OF est l'unité et le rayon équatorial  $1 : \cos \theta$ .

Par la figure, on a aussi :

$$\overline{FX}^2 = \overline{OX}^2 - \overline{OF}^2, \quad \overline{FZ}^2 = \overline{OZ}^2 - \overline{OF}^2;$$

d'où, par l'égalité (12),

$$FX = FZ \cos \theta.$$

Le point X décrit aussi un ellipsoïde (à  $n$  dimensions) dont le rayon polaire dirigé suivant OF est l'unité et le rayon équatorial  $\cos \theta$ .

En résumé, les deux substitutions  $x$  et  $y$  (3) et (3)' ont pour effet l'une de dilater, l'autre de contracter le milieu par rapport à l'axe; mais elles se compensent et les points restent sur une sphère. La seconde a, en outre, pour effet de produire une rotation  $\theta$  autour de l'axe. Ses éléments sont donc suffisants pour déterminer la première, ainsi que la substitution générale.

Comme conclusion de ce paragraphe on peut dire que, pour  $n$  impair, le seul invariant qui caractérise une substitution orthogonale est l'angle  $\theta$ . La position de l'axe de rotation par rapport à un système d'axes qu'on peut choisir arbitrairement est définie par  $\frac{n(n-1)}{2} - 1$  paramètres.

On peut encore en conclure ce théorème connu de cinématique que le déplacement d'un solide à  $n$  dimensions dans un espace de même degré peut être considéré comme une rotation autour d'une droite, si  $n$  est impair.

#### § 4. — Cas de $n$ pair.

Dans ce cas, si l'on veut obtenir les coefficients  $\alpha$  de la substitution orthogonale en fonction des seules différences  $\alpha_{hk} - \alpha_{kh}$ , il faut adopter une marche différente.

Posons :

$$\frac{\alpha_{hk} + \alpha_{kh}}{2} = q_{hk} = q_{kh}, \quad \alpha_{hh} = q_{hh}$$

$$\frac{\alpha_{hk} - \alpha_{kh}}{2} = p_{hk} = -p_{kh}, \quad p_{hh} = 0$$

et écrivons, comme au § 2 :

$$u_h = x_h + y_h$$

$$x_h = q_{h1}z_1 + q_{h2}z_2 + \dots + q_{hn}z_n$$

$$y_h = p_{h1}z_1 + p_{h2}z_2 + \dots + p_{hn}z_n.$$

A chacune de ces substitutions sont attachées deux surfaces du second degré, dont nous devons étudier avec quelques détails l'orientation et la grandeur des axes.

Soient XYZ les points dont les coordonnées respectives sont  $x_h y_h z_h$ ; les surfaces à considérer sont deux ellipsoïdes (appelés inverses), lieux des points X ou Y lorsque le point Z décrit une sphère dont le centre est l'origine O, et deux quadriques (dites inverses), lieux des points X ou Y lorsque Z décrivant une sphère, la projection des OX ou OY sur OZ reste constante.

Désignons par  $E_x, E_y, K_x, K_y$  les premiers membres des équations de ces ellipsoïdes et quadriques; posons :

$$Q_{kk'} = Q_{k'k} = \sum_h q_{hk} q_{hk'} \quad Q_k = \sum_h q_{hk}^2$$

$$P_{kk'} = P_{k'k} = \sum_h p_{hk} p_{hk'} \quad P_k = \sum_h p_{hk}^2$$

pour représenter les sommes des produits formés avec les termes correspondants de deux colonnes de rangs  $k$  et  $k'$  des déterminants en  $q$  ou en  $p$  et nous avons :

$$\sum_h x_h^2 = E_x \equiv \sum_h Q_k z_k^2 + \sum_{kk'} Q_{kk'} z_k z_{k'} = \text{const.}$$

$$\sum_h y_h^2 = E_y \equiv \sum_k P_k z_k^2 + \sum_{kk'} P_{kk'} z_k z_{k'} = \text{const.}$$

$$\sum_h x_h z_h = K_x \equiv \sum_h q_{hh} z_h^2 + \sum_{hk} q_{hk} z_h z_k = \text{const.}$$

$$\sum_h y_h z_h = K_y \equiv \sum_h p_{hh} z_h^2 + \sum_{hk} p_{hk} z_h z_k = \text{const.} = 0.$$

Dans les deuxièmes sommes, on ne devra pas tenir compte des termes pour lesquels  $k = k'$  et  $h = k$  qui ont été mis en évidence dans la première somme. Les autres termes se trouveront répétés deux fois par la permutation des indices. Il en résulte que la quadrique  $K_y$  n'existe pas à cause de  $p_{hh} = 0$  et  $p_{hk} + p_{kh} = 0$ , et que les vecteurs  $y$  et  $z$  sont perpendiculaires.

Entre les coefficients  $P$  et  $Q$  existent des relations. On peut, en effet, s'assurer par un calcul direct que, sans même supposer orthogonal le déterminant des  $\alpha$ , si on désigne par  $L_{kk'}$  la somme des produits des termes correspondants de deux lignes dont les rangs sont  $k$  et  $k'$  dans ce déterminant; par  $C_{kk'}$  la somme analogue pour deux colonnes; par  $L_k$  ou  $C_k$  la somme des carrés des éléments d'une ligne ou d'une colonne, de rang  $k$ , on a :

$$Q_{kk'} + P_{kk'} = L_{kk'} + C_{kk'}, \quad Q_k + P_k = \frac{L_k + C_k}{2}$$

et, par suite, si le déterminant est orthogonal,

$$Q_{kk'} + P_{kk'} = 0, \quad Q_k + P_k = 1.$$

Il en résulte :

$$E_x + E_y = \sum_h z_h^2 = \text{const.}$$

c'est-à-dire que l'intersection des ellipsoïdes est sur une sphère.

De ces relations, nous déduirons celles existant entre les longueurs des axes des trois surfaces considérées. Les carrés de ces longueurs nous sont donnés par les racines des équations dites en  $S$  de ces surfaces. Désignons les premiers membres de ces équations par :

$$F_x \quad F_y \quad F'_y$$

pour les surfaces

$$E_x \quad E_y \quad K_y,$$

et par

$$S_x \quad S_y \quad S'_y$$

leurs racines.

Nous avons, sous forme de déterminants du  $n^{\circ}$  degré

$$F_x(S) = \begin{vmatrix} Q_1 - S_x & Q_{12} & \dots \\ Q_{21} & Q_2 - S_x & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

$$F_y(S) = \begin{vmatrix} P_1 - S_y & P_{12} & \dots \\ P_{21} & P_2 - S_y & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_1 - (1 - S_y) & Q_{12} & \dots \\ Q_{21} & Q_2 - (1 - S_y) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

à cause des relations entre P et Q, et, par suite

$$S_x + S_y = 1.$$

Puis :

$$F'_y(S) = \begin{vmatrix} q_{11} - S'_y & q_{12} & \dots \\ q_{21} & q_{22} - S'_y & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Mais la règle de multiplication des déterminants nous donne :

$$F'_y(S'_y) \times F'_y(-S'_y) = F_x(S'_y)^2,$$

c'est-à-dire, au second membre, la fonction relative à l'ellipsoïde  $E_x$ .  
On devra donc avoir :

$$(S'_y)^2 = S_x = 1 - S_y.$$

Les directions d'axes de ces surfaces sont les mêmes ; car pour l'ellipsoïde  $E_y$  et la quadrique  $K_y$  les doubles produits  $Q_{kk}'$  et  $q_{kk}$  s'annulent en même temps.

Quant aux ellipsoïdes, on voit que les équations dont on déduit les cosinus  $\gamma\gamma'$  relatifs à un axe quelconque.

$$\begin{aligned} (Q_1 - S_x)\gamma_1 + Q_{12}\gamma_2 + \dots &= 0 \\ (P_1 - S_y)\gamma'_1 + P_{12}\gamma'_2 + \dots &= 0. \end{aligned}$$

sont les mêmes à cause des égalités :

$$P_k - S_y = -(Q_k - S_x) \quad P_{kk}' + Q_{kk} = 0.$$

Ces diverses propositions nous permettent de résoudre le problème en vue : exprimer les coefficients  $\alpha$  d'une substitution orthogonale en fonction des différences  $\alpha_{hk} - \alpha_{kh}$  considérées comme paramètres. La marche à suivre est la suivante. La résolution de l'équation en  $S$  relative à l'ellipsoïde  $E_v$ , dont les coefficients ne dépendent que des paramètres, nous donnera  $n$  valeurs pour  $S_v$ , ainsi que les directions d'axes qui leur correspondent. Or, comme la quadrique  $K_v$  a des axes de mêmes directions et que les racines de son équation en  $S$  sont données par :

$$S'_v = \sqrt{1 - S_v}$$

on en déduira ses coefficients par des relations du premier degré, coefficients qui ne sont autres que les  $\alpha_{hh}$  et  $\frac{\alpha_{hk} + \alpha_{kh}}{2}$  et qui, adjoints aux paramètres, nous fourniront tous les  $\alpha$ .

Le résultat est donc loin d'être aussi simple que dans le cas de  $n$  impair. Cependant il se présente une simplification pareille à celle où nous a conduits dans ce cas la considération de l'angle  $\theta$ . On sait, en effet, que si  $n$  est pair, le déplacement d'un solide à  $n$  dimensions et fixé en un point, peut se ramener à  $\frac{n}{2}$  rotations autour de  $\frac{n}{2}$  axes de dimensions  $\frac{n}{2}$  et perpendiculaires entre eux ; autrement dit, que le mouvement est défini par  $\frac{n}{2}$  invariants et que, des  $\frac{n(n-1)}{2}$  paramètres, il doit y en avoir  $\frac{n(n-2)}{2}$  qui ne dépendent que du choix des axes.

Au point de vue géométrique où nous nous sommes placés, on opérera cette réduction en prenant pour axes de coordonnées les axes principaux des surfaces considérées.

Leurs équations ne devant contenir que les carrés des variables  $z_h^2$ , on devra avoir :

$$q_{hk} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_{hk} = -\alpha_{kh} = p_{hk}.$$

Il en résulte :

$$Q_{kk'} = 0 \quad Q_k = \alpha_{kk}^2 \quad P_k = 1 - \alpha_{kk}^2.$$

L'égalité  $P_{kk'} = 0$  comparée à l'égalité  $\sum_h \alpha_{kh} \alpha_{k'h} = 0$  exige de plus :

$$\alpha_{kk} = \alpha_{k'k'},$$

c'est-à-dire que les surfaces sont devenues des sphères. Comme le rayon de la sphère décrite par le point Z est arbitraire, on peut même supposer égaux les rayons des sphères transformées des ellipsoïdes et écrire :

$$\alpha_{kk}^2 = 1 - \alpha_{kk}^2.$$

Les égalités  $P_{kk'} = 0$  en nombre surabondant serviront à déterminer les autres coefficients  $\alpha$ . Le déterminant de ces coefficients aura les termes de sa diagonale égaux entre eux et à une quantité arbitraire moindre que un, soit  $\omega$ . Les termes symétriques de la diagonale seront égaux et de signes contraires. Il est facile de le former si  $n = 4$ .

Les égalités  $P_{kk'} = 0$  sont satisfaites par :

$$\alpha_{12} = \alpha_{34}, \quad \alpha_{13} = -\alpha_{24}, \quad \alpha_{23} = \alpha_{14}.$$

Il s'écrit donc :

$$\begin{vmatrix} \omega & \alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{14} \\ -\alpha_{12} & \omega & \alpha_{14} & \alpha_{13} \\ +\alpha_{13} - \alpha_{14} & \omega & & \alpha_{12} \\ -\alpha_{14} - \alpha_{13} - \alpha_{12} & & \omega & \end{vmatrix}$$

En y adjoignant l'égalité :

$$\omega^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 + \alpha_{14}^2 = 1,$$

on voit qu'il ne dépend que deux constantes.





**CONTRIBUTION A L'ÉTUDE**  
**DES**  
**DÉRIVÉS HALOGÉNÉS DES ACÉTONES**  
**DE LA SERIE GRASSE**

**Par A. RICHARD**

AGRÉGÉ DES SCIENCES PHYSIQUES, CHEF DES TRAVAUX CHIMIQUES  
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

**INTRODUCTION**

Des diverses formes d'énergie auxquelles le chimiste peut avoir recours pour produire des réactions, l'énergie électrique est l'une des plus intéressantes.

Elle présente, en effet, l'avantage de se prêter à toute une série de transformations qui sont d'un précieux secours. Dans bien des cas même, elle permet d'obtenir des résultats qu'aucun autre mode d'énergie ne serait capable de fournir, et cela, aussi bien dans le domaine de la chimie pure que dans celui de la chimie industrielle. Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter un rapide coup d'œil sur l'état actuel de nos connaissances électrochimiques.

L'étincelle que nous fournissent nos producteurs ordinaires d'énergie électrique dans les laboratoires (pile et bobine de Ruhmkorff, par exemple), est d'un usage constant pour provoquer des combinaisons ou des décompositions. Mais que l'on demande l'étincelle aux machines d'induction de l'industrie, et aussitôt l'on obtient l'arc électrique et ses merveilleuses applications (four électrique, électro-metallurgie.)

L'effluve elle-même, bien que peu employée dans l'industrie, peut rendre des services appréciables.

Mais c'est surtout sous forme de *courant* que l'électricité a été d'un secours tout à fait inespéré pour les chimistes.

Lorsque, en effet, un courant électrique traverse un liquide conducteur constitué par un corps composé, ce corps (*électrolyte*) se décompose en deux éléments ou groupes d'éléments : l'un, le radical électronégatif, se dégage sur l'électrode positive ou *anode*; l'autre, le radical électropositif, se dégage sur l'électrode négative ou *cathode*. Les éléments ainsi séparés sont désignés sous le nom d'*ions*, l'*anion* se dégageant sur l'anode et le *cation* sur la cathode. C'est là le type le plus simple de l'*Électrolyse*, celui qui nous est fourni par le sulfate de cuivre dissous dans l'eau, en présence d'électrodes inattaquables (électrodes de platine).

Mais, à côté de ce cas très simple qui est constamment utilisé dans l'analyse électrochimique, se trouvent des cas beaucoup plus nombreux et aussi plus intéressants, dans lesquels la réaction type est en quelque sorte cachée par des réactions secondaires. Ces électrolyses particulières peuvent être classées en diverses catégories suivant les conditions dans lesquelles elles se produisent.

Tantôt, l'un des ions, au lieu de se dégager, réagit sur l'électrode qui lui correspond; c'est ce qui a lieu lorsqu'on électrolyse le sulfate de cuivre avec une anode en cuivre : l'ion  $SO_4$  forme avec le cuivre de l'anode du sulfate de cuivre qui se dissout dans l'eau, en maintenant constante la concentration de l'électrolyte en sulfate de cuivre. Il en résulte que, finalement, le cuivre de l'anode semble avoir été transporté sur la cathode. Des électrolyses de ce genre sont à la base d'un grand nombre d'applications industrielles; c'est le principe même de la galvanoplastie, de l'argenture, du raffinage du cuivre.

Tantôt, au contraire, l'ion considéré ne se dégage pas sur l'électrode correspondante; il ne se combine pas non plus à l'électrode, mais il réagit sur l'électrolyte ou même sur des corps dissous dans cet électrolyte.

C'est ainsi que Lorenz (1) a donné une méthode très simple et très originale de préparation électrolytique des hydrates d'oxydes métal-

(1) LORENZ, *Zeitschrift für anorganische Chemie*, t. XIII, p. 436. — *Bull. de la Soc. chim. de Paris*, 3<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 319.

liques. Cette méthode consiste essentiellement dans l'électrolyse d'un sel alcalin en prenant comme anode soluble une plaque du métal dont on veut obtenir l'oxyde. Dans ces conditions, l'alcali, qui prend naissance par une réaction secondaire au voisinage de la cathode, réagit sur le sel formé aux dépens de l'anode, et l'hydrate d'oxyde se précipite. Cette méthode est d'autant plus précieuse qu'elle permet d'avoir un corps parfaitement pur.

Nous pourrions citer de nombreux exemples de même nature, mais cela est inutile; il nous suffira d'ajouter que ce sont des réactions de ce type (actions de l'un des ions sur un corps dissous dans l'électrolyte) qui font l'objet du présent travail.

Mais, avant d'exposer nos recherches, nous croyons nécessaire de préciser comment nous avons été amené à entreprendre cette étude, et quel était l'état de la question étudiée au moment où nous l'avons abordée.

Les électrolyses que nous venons de citer et celles qui pendant longtemps ont fait presque uniquement l'objet de recherches expérimentales, portaient sur des composés appartenant à la chimie minérale. Peu d'électrolyses avaient été tentées avec des composés organiques. Plusieurs causes doivent être attribuées à ce manque de recherches. D'abord, la plupart des composés organiques, à l'état pur, ne sont pas conducteurs de l'électricité : tels sont les alcools, les éthers, les aldéhydes, les acétones. En second lieu, la décomposition électrolytique des corps organiques conducteurs, les acides par exemple, est presque toujours accompagnée d'un ensemble de réactions secondaires qui compliquent tellement le phénomène, qu'il est souvent difficile de s'en faire une idée nette.

D'autre part, les difficultés inhérentes à l'électrolyse de ces substances ont fait que les recherches ont presque toujours été dirigées dans des sens très différents, *sans méthode fixe, ni règle déterminée*. Aussi ne devons-nous pas nous étonner de la confusion qui régnait dans le chapitre concernant l'électrolyse des substances organiques, il y a quelques années à peine.

C'est alors qu'un savant chimiste allemand, M. Walther Löb<sup>(1)</sup>, professeur à l'Université de Bonn, entreprit la tâche de mettre un peu

(<sup>1</sup>) WALTHER LOB, *Unsre Kenntnisse in der Elektrolyse und Elektrosynthese organischer Verbindungen*.

d'ordre dans nos connaissances électrochimiques concernant les substances organiques : « *C'est, dit-il, en indiquant les recherches déjà faites et en signalant les lacunes, qu'il pourra rendre quelque service à la science, ne serait-ce qu'en suscitant des recherches nouvelles.* »

Ajoutons en outre que c'est en lisant dans le *Moniteur scientifique* du Dr Quesneville<sup>(1)</sup> divers articles sur l'électrolyse des matières organiques que nous avons songé à entreprendre les recherches qui font l'objet de ce travail. Ces articles nous avaient été signalés par M. Vèzes, professeur de chimie minérale à la Faculté des sciences de Bordeaux, auquel nous sommes heureux d'adresser ici nos plus sincères remerciements pour l'intérêt qu'il n'a cessé de prendre à nos recherches.

La propriété qu'ont la plupart des matières organiques d'être de mauvais conducteurs de l'électricité, a obligé les chimistes à les mélanger à des corps conducteurs, ce qui fait que, si l'on veut être tout à fait précis, on doit parler non pas de l'électrolyse de ces substances, mais bien plutôt de l'électrolyse de telle ou telle matière minérale conductrice en présence des substances organiques. Il résulte de là que la plupart des réactions obtenues par voie électrolytique avec les composés organiques sont des réactions secondaires analogues à celles que nous avons signalées plus haut. On ne peut guère en excepter que le cas de la décomposition électrolytique des acides organiques ou des sels de ces acides ; et encore ces décompositions sont presque toujours accompagnées de réactions qui se superposent au phénomène principal. Mais, ce cas mis à part, toutes les réactions électrolytiques appliquées aux substances organiques sont des réactions secondaires que l'on peut classer en trois groupes distincts :

- 1° Réactions d'oxydation,
- 2° Réactions de réduction,
- 3° Réaction de substitution.

Les réactions de substitution, les seules que nous considérerons ici, sont peu nombreuses, et, comme le fait remarquer M. Gourwitsch dans le travail déjà cité : « *Une méthode vraiment pratique pour intro-*

(1) WALTHER LOB, Notions actuelles sur l'électrolyse et l'électrosynthèse des composés organiques (*Moniteur scientifique* du Dr Quesneville, mai 1898, et *Zeitschrift für Elektrochimie*, t. II, p. 293).

GOURWITSCH, Les applications de l'électrolyse à la chimie organique (*Moniteur scientifique* du Dr Quesneville, juin 1897, p. 409).

*duire le chlore et le brome dans les matières organiques avec l'aide de l'électrolyse nous manque encore. »*

C'est cette méthode, que réclame M. Gourwitsch, que nous avons essayé de trouver; et, si nous n'avons pas complètement résolu la question (ce que nous ne pouvions avoir la prétention de faire dans un premier travail), nous croyons néanmoins avoir obtenu quelques résultats qui sont un premier pas dans la voie de la solution cherchée.

Obtenir des dérivés halogénés de quelques substances organiques, tel est notre objectif. Mais à quelle fonction de la chimie organique allons-nous d'abord nous adresser ? Nous avons songé, dès le début de nos recherches, à reprendre les expériences des chimistes qui nous avaient précédé dans cette voie, et à essayer d'aller plus loin qu'eux ou, tout au moins, de perfectionner leurs méthodes. Or, le premier essai d'introduction des halogènes dans les matières organiques par voie électrolytique a été la préparation de l'iodoforme par l'électrolyse d'une solution aqueuse d'iodure de potassium en présence d'alcool ou d'acétone. Mais, si les rendements étaient satisfaisants lorsque l'on opérait avec l'alcool, ils laissaient notablement à désirer dans le cas où l'on remplaçait l'alcool par l'acétone. On sait cependant avec quelle facilité l'acétone en liqueur alcaline donne naissance à de l'iodoforme. Il y avait là un premier point qui appela notre attention.

En second lieu, comme une fabrique allemande de produits chimiques avait fait breveter un procédé de préparation électrolytique du chloroforme, du bromoforme et de l'iodoforme, tout en reconnaissant que les rendements obtenus, surtout pour les deux premiers corps, étaient très faibles, nous avons résolu d'examiner d'un peu plus près cette question, et nous nous sommes décidé à étudier l'électrolyse des acides chlorhydrique, bromhydrique et iodhydrique ou de leurs sels, en présence de l'acétone et de ses homologues supérieurs.

Nous avions, en faisant ce choix, un avantage immédiat; c'est que, s'il n'existait que très peu de travaux entrepris avec l'acétone ordinaire, il n'en existait aucun avec les acétones supérieures. Nous pouvions donc espérer obtenir quelques résultats intéressants dans un champ presque inexploré, et les observations que nous avons faites, quelque incomplètes qu'elles soient, résolvent un certain nombre de points non étudiés jusqu'ici.

Nous avons maintenant, avant d'entrer dans le détail de nos expériences, un agréable devoir à remplir : celui de présenter à M. Gayon,

doyen de la Faculté des Sciences de Bordeaux, l'expression de notre plus sincère et de notre plus respectueuse gratitude. C'est en effet dans le laboratoire et sous la direction de notre très honoré Maître que nous avons entrepris ce travail ; c'est grâce à ses conseils et à son concours matériel et moral de tous les instants que nous devons d'avoir pu mener nos recherches à bonne fin. Qu'il nous permette de l'en remercier publiquement.

## CHAPITRE PREMIER

### Préparation électrolytique des dérivés halogénés de l'acétone.

GÉNÉRALITÉS. — L'étude de l'action du chlore, du brome et de l'iode sur les acétones et tout particulièrement sur l'acétone ordinaire (diméthylcétone) a fait l'objet d'un grand nombre de recherches. Ce sont toutefois les dérivés chlorés qui ont le plus retenu l'attention des chimistes; les dérivés bromés ou iodés sont moins connus.

Les méthodes de préparation de ces composés peuvent être classées en trois groupes différents, suivant que l'on fait agir un courant de chlore sur l'acétone elle-même ou sur des corps pouvant donner naissance à de l'acétone, ou bien suivant que l'on fait réagir sur l'acétone des composés chlorés.

De ces trois méthodes, la première, action du chlore sur l'acétone, a été la plus utilisée. Les autres servent surtout à préparer l'un des composés chlorés que la théorie permet de prévoir. Ce sont même, dans un grand nombre de cas, plutôt des modes de formation de ces corps que de véritables procédés de préparation.

C'est, en particulier, à l'action directe du chlore sur l'acétone que s'est adressé M. Cloez dans un travail qui a pour titre : *Recherches sur les dérivés chlorés de l'acétone*, travail que son auteur présenta en 1886, à la Faculté des Sciences de Paris, comme thèse de doctorat.

Si l'on fait passer un courant lent de chlore pur et sec dans de l'acétone pure et sèche, préalablement refroidie soit par un mélange réfrigérant, soit plus simplement par un courant d'eau froide, ce gaz réagit vivement sur l'acétone et se substitue, avec dégagement de chaleur, à un ou plusieurs atomes d'hydrogène. Il se forme ainsi du gaz acide chlorhydrique qui se dégage, et il reste, mélangés à l'acétone non attaquée, divers dérivés chlorés de ce corps.



La théorie permet de prévoir l'existence de neuf dérivés chlorés. M. Cloez a pu arriver à constater dans cette réaction la formation d'au moins quatre d'entre eux : La *monochloracétone* ( $\text{CH}_3\text{-CO-CH}_2\text{Cl}$ ) ; la *dichloracétone dissymétrique* ( $\text{CH}_3\text{-CO-CHCl}_2$ ) et les deux *trichloracétone*s ( $\text{CH}_2\text{Cl-CO-CHCl}_2$ ) et ( $\text{CH}_3\text{-CO-CCl}_3$ ), et l'une au moins des *tétrachloracétone*s, la *tétrachloracétone dissymétrique* ( $\text{CH}_2\text{Cl-CO-CCl}_3$ ). Il est d'ailleurs très vraisemblable de penser que le nombre des dérivés formés et leurs proportions respectives dans le mélange doivent varier avec toutes les conditions de l'expérience (durée, température). Des distillations fractionnées permettent ensuite d'isoler ces corps.

En entreprenant les recherches qui font l'objet de ce travail, nous nous proposons de voir si le chlore *naissant*, obtenu par *électrolyse*, donnerait les mêmes résultats que le chlore préparé par la méthode chimique ordinaire et si l'on aurait un intérêt quelconque à employer la méthode électrolytique.

Nous pouvons dire de suite que si la méthode électrolytique ne nous a pas permis jusqu'ici de préparer tous les dérivés qui ont été obtenus par M. Cloez, par contre, elle nous a fourni la possibilité d'avoir l'un de ces corps à l'état de très grande pureté, et cela avec d'excellents rendements.

La méthode électrolytique présente en outre l'avantage de pouvoir être utilisée à la préparation des dérivés bromés ou iodés de l'acétone.

Notre étude se trouvera par suite divisée en trois parties suivant que nous aurons en vue la préparation de l'un quelconque de ces trois groupes de dérivés. Comme, d'autre part, les résultats se sont montrés différents lorsque nous avons opéré l'électrolyse en milieu acide ou en milieu alcalin, nous étudierons d'abord l'électrolyse des acides chlorhydrique, bromhydrique et iodhydrique en présence d'acétone et ensuite l'électrolyse de quelques-uns de leurs sels.

Ajoutons enfin que l'acétone que nous avons employée dans nos recherches, a été, soit l'acétone pure extraite de sa combinaison avec le bisulfite de sodium, soit l'acétone pure du commerce que nous avons nous-même soumise à des distillations fractionnées.

Le point d'ébullition de cette acétone était de  $56^{\circ}5$  sous la pression de 761 millimètres.

### A. — Électrolyse de l'acide chlorhydrique en présence de l'acétone ordinaire.

. HISTORIQUE. — L'électrolyse de l'acide chlorhydrique en présence de l'acétone ordinaire a été tentée pour la première fois par M. Riche (1) en 1859.

*Si l'on fait passer, dit ce savant, dans un mélange d'acide chlorhydrique et d'acétone, le courant électrique produit par trois éléments Bunsen, l'acide chlorhydrique est décomposé, le chlore naissant réagit sur l'acétone et la liqueur s'échauffe fortement. Il se forme bientôt des gouttelettes huileuses dont la production s'arrête au bout de vingt heures environ. Ce liquide huileux, purifié et distillé, constitue l'acétone monochlorée.*

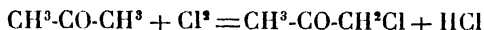
Un certain nombre de critiques peuvent être adressées à cette expérience de M. Riche, et M. Ch. Cloez étudiant les divers modes de préparation de la monochloracétone ne pouvait manquer d'en signaler quelques-unes.

Le principal reproche qu'il fait à l'expérience de M. Riche est le suivant :

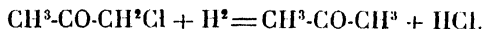
On ne saurait, en opérant par voie électrolytique, transformer un poids donné d'acétone en monochloracétone; il y a toujours, d'après M. Cloez, environ un tiers d'acétone non transformé, et cela, même en saturant à différentes reprises le liquide employé avec du gaz acide chlorhydrique.

Ce savant donne de ce fait l'interprétation suivante :

La décomposition électrolytique de l'acide chlorhydrique ne met pas seulement du chlore en liberté; il y a en même temps dégagement d'hydrogène à la cathode, et, si la réaction représentée par l'équation



se produit au voisinage de l'anode, on doit avoir la réaction inverse au voisinage de la cathode, c'est-à-dire la réaction :



Cette critique de M. Cloez pouvait *a priori* être fondée; aussi, nous en sommes-nous préoccupé, et nous verrons, par la suite, quelle

(1) RICHE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLIX, p. 176.

réponse nous aurons à lui faire; pour l'instant, nous nous contentons de la signaler.

Mais des critiques d'un tout autre ordre auraient pu être adressées par M. Cloez à l'expérience de M. Riche. Nous ne savons, en effet, presque rien sur les conditions expérimentales de cette électrolyse, nous ignorons quelle était l'intensité du courant électrique, quelle était la densité du courant aux électrodes ainsi que la force électromotrice aux bornes de l'appareil. Nous ne savons pas davantage quelle était la température à laquelle l'électrolyse était produite; et enfin nous n'avons aucun renseignement sur la composition quantitative de l'électrolyte.

Rien de tout cela n'est indiqué; nous n'avons qu'un seul renseignement : le courant a été fourni par trois éléments Bunsen.

Cependant, une étude systématique de la réaction précédente nécessite que l'on tienne compte de toutes ces particularités, et c'est ce que nous avons essayé de faire dans le présent travail. Nous le pouvons d'autant mieux que les mesures électriques ont atteint aujourd'hui un degré de précision qu'elles étaient loin d'avoir lorsque M. Riche faisait ses expériences.

Depuis cette époque, un seul chimiste a tenté à nouveau la préparation électrolytique des dérivés chlorés de l'acétone. Ce chimiste est M. Mulder. Malheureusement, comme M. Riche, il ne donne aucune indication sur la façon dont il opère, il se borne à dire que, en employant la méthode de M. Riche, il a obtenu le composé dichloré dissymétrique de l'acétone ( $\text{CH}^3\text{-CO-CHCl}^2$ ).

Nous dirons simplement, au sujet de cette expérience, que nous n'avons jamais, au cours de nos recherches, observé ce composé. Il nous sera d'ailleurs très facile de donner une explication très plausible de ce fait.

DESCRIPTION DE LA MÉTHODE EXPÉRIMENTALE EMPLOYÉE DANS CES RECHERCHES. — Le dispositif expérimental que nous avons utilisé dans tout le cours de nos recherches est d'une extrême simplicité.

L'appareil électrolytique n'est autre qu'un vase de Bohême d'un usage courant dans les laboratoires. Il est préférable de prendre un récipient sans bec de façon à pouvoir obtenir facilement une fermeture complète au moyen d'un bouchon. Suivant l'expérience que nous avons en vue, nous fixions ou non à ce bouchon un vase en terre

poreuse, ce qui permettait de séparer les liquides cathodique et anodique ou bien de les laisser mélangés.

Des électrodes de platine plongeaient l'une dans le vase poreux et l'autre à l'extérieur. Nous avons employé dans nos recherches des électrodes de surfaces différentes de façon à pouvoir étudier l'influence de la densité du courant sur la nature des produits obtenus et sur le rendement.

Enfin, dans le but de déterminer l'influence de la température, nous avons placé notre appareil, soit dans un cristalliseur traversé par un courant d'eau froide, soit dans un bain-marie. La température était donnée par deux thermomètres, l'un plongeant dans le liquide anodique, et l'autre dans le récipient intérieur (cristalliseur ou bain-marie).

Quant au courant électrique, nous l'avons demandé, dans la plupart de nos recherches, à l'une des usines de la ville à laquelle se trouvait directement relié notre laboratoire. Pour obtenir des courants d'une intensité déterminée, nous avons employé, comme résistance auxiliaire, un rhéostat formé de lampes à incandescence placées en dérivation sur le circuit principal. Il nous suffisait alors de prendre une ou plusieurs lampes de seize bougies pour avoir des courants d'intensité voisine de 1/2 ampère, 1 ampère, 1 amp. 5. Pour avoir des courants de plus faible intensité, nous intercalions dans le circuit principal une ou plusieurs lampes en série et nous réalisions ainsi toute une gamme d'intensités diverses.

Dans d'autres cas enfin, nous avons utilisé une batterie d'accumulateurs appartenant au laboratoire de chimie générale de la Faculté des Sciences. Nous avons ainsi des courants très faibles et surtout très constants.

On pourrait craindre que les variations dans l'intensité du courant de la ville fussent une gêne pour des expériences un peu précises comme celles que nous avions l'intention d'effectuer. Il n'en est heureusement pas ainsi, surtout si l'on a soin de mesurer l'intensité du courant à intervalles réguliers (toutes les heures et même toutes les demi-heures, si cela est nécessaire). En prenant ensuite la moyenne des nombres lus à l'ampèremètre, on a la valeur de l'intensité moyenne du courant avec une approximation très suffisante pour la pratique. Nous n'avons jamais en effet observé que de faibles variations d'intensité atteignant très rarement un ou deux dixièmes d'ampère; et souvent ces

variations étaient dues, en partie tout au moins, à des variations dans la résistance de l'électrolyte.

Voici, à titre d'exemple, deux tableaux mettant en évidence l'ordre de grandeur de ces variations dans la plupart de nos expériences, qui n'ont jamais été faites avec des intensités supérieures à 5 ampères.

Tableau I

HEURE DE L'OBSERVATION	AMPÈREMÈTRE	VOLTMÈTRE
—	—	—
8 » m.	4,4	9,9
8 30	4,5	9,9
9 »	4,5	9,9
9 30	4,5	9,9
10 »	4,5	9,9
10 30	4,5	9,9
11 »	4,5	9,9
11 30	4,5	9,9
1 » s.	4,5	10,5
1 30	4,5	10,5
2 »	4,5	10,5
Arrêt. 2 30	4,5	10,5

L'intensité du courant a été constante à moins de 0 amp. 1 près

Tableau II

HEURE DE L'OBSERVATION	AMPÈREMÈTRE	VOLTMÈTRE
—	—	—
9 » m.	1,21	2,4
9 30	1,20	2,5
10 »	1,20	2,5
10 30	1,20	2,5
11 »	1,20	2,5
11 30	1,20	2,5
12 20 s.	1,16	2,6
1 »	1,15	2,6
1 30	1,10	2,6
2 »	1,20	2,7
2 30	1,25	2,75
3 »	1,28	2,8
3 30	1,20	2,7
4 »	1,25	2,85
4 30	1,25	2,9
5 »	1,25	2,9
5 30	1,27	2,9
6 »	1,28	2,9
6 30	1,26	2,9
Arrêt. 8 30	1,25	3 »

La moyenne des nombres ainsi observés donne 1<sup>amp.</sup> 218 comme intensité moyenne pendant toute la journée, de telle sorte que si l'on calcule le rendement de l'expérience avec le nombre 1<sup>amp.</sup> 21, l'erreur commise est tout à fait de l'ordre de grandeur des erreurs admissibles dans ce genre d'expériences.

A remarquer en outre l'accroissement continu de la différence de potentiel aux bornes pendant toute la durée de l'expérience. Dans certains cas même, la résistance de l'électrolyte s'accroissait à un tel point que le voltamètre accusait des variations brusques et avertissait qu'il était nécessaire de mettre fin à la réaction.

DÉTAIL D'UNE EXPÉRIENCE. — Afin de bien faire comprendre la façon dont nous avons opéré et pour ne plus avoir à y revenir par la suite, nous allons donner le détail d'une expérience.

Considérons un mélange fait de volumes égaux d'acide chlorhydrique (1) et d'acétone. Dès que ces deux liquides sont mis en contact, la masse s'échauffe et brunit. On refroidit par un mélange réfrigérant ou par de l'eau froide, et, lorsque l'on a atteint la température désirée, on fait passer le courant électrique.

Sur la cathode se produit un abondant dégagement gazeux, alors qu'à l'anode on n'aperçoit que de très fines bulles gazeuses, en très petit nombre d'ailleurs, qui glissent le long de la lame de platine et viennent crever à la surface du liquide. On remarque en même temps que le liquide brun du début s'éclaircit peu à peu et devient parfaitement transparent et incolore.

Au bout d'un temps plus ou moins long, on perçoit une odeur piquante, extrêmement vive, agissant d'une façon très désagréable sur les muqueuses. Cette odeur, qui se manifeste avec la plupart des dérivés halogénés des acétones, met en évidence la formation de l'un au moins de ces composés. Mais bientôt après, apparaissent dans le liquide homogène des gouttelettes d'apparence huileuse qui glissent le long de l'anode et tombent au fond du récipient. A partir de cet instant, les deux couches liquides se manifestent d'une manière de plus en plus nette, la couche inférieure augmente d'épaisseur au fur et à mesure de la marche de la réaction. Quand on juge que l'expérience a suffisamment duré, on n'a plus qu'à interrompre le courant et à laisser reposer le liquide avant d'en déterminer la composition.

(1) L'acide chlorhydrique que nous avons utilisé, est l'acide pur du commerce, marquant 22° à l'aréomètre Baumé.

Les deux phases liquides obtenues peuvent être facilement séparées l'une de l'autre par décantation au moyen d'un tube à brome. La couche supérieure est presque uniformément formée d'une solution d'acide chlorhydrique contenant une plus ou moins grande quantité d'acétone non attaquée; quant à la partie inférieure, elle est constituée par un dérivé chloré de l'acétone.

L'analyse du produit brut et surtout les expériences ultérieures nous ont montré que l'expérience donne de la monochloracétone presque pure.

La purification du produit brut peut être obtenue par une série de distillations fractionnées effectuées soit sous la pression ordinaire, soit mieux, comme l'a fait M. Cloez, sous pression réduite. Malheureusement, le rendement est notablement diminué à cause de la formation dans le ballon d'un résidu noir en plus ou moins grande quantité. C'est pour obvier à cet inconvénient que nous avons songé à distiller sous pression réduite non pas le produit chloré seul, mais plutôt ce corps mélangé à une quantité d'eau déterminée.

On sait en effet que, lorsqu'on distille sous une pression donnée un mélange formé de deux phases liquides distinctes et de deux composants indépendants, il existe une température fixe d'ébullition, inférieure à la température d'ébullition de chacun des deux liquides considérés sous la pression donnée, et, le liquide qui distille a une composition déterminée (1).

C'est en mettant cette loi à profit, qu'il nous a été possible de purifier complètement les produits de la réaction. Il suffit alors de séparer le composé chloré de l'eau surnageante, de le dessécher sur du chlorure de calcium fondu pur et sec et de le soumettre à une dernière distillation pour avoir un produit parfaitement pur.

RÉSULTATS. — L'étude des propriétés du corps préparé comme nous venons de le dire et son analyse élémentaire permettent d'affirmer que l'on a obtenu l'*acétone monochlorée* ( $\text{CH}_3\text{-CO-CH}_2\text{Cl}$ ).

Ce composé est un liquide incolore, d'odeur vive et piquante, provoquant le larmolement.

Sa densité à l'état liquide est de 1,160 à 17°.

Sa densité de vapeur, prise dans la vapeur d'aniline par la méthode de Meyer, nous a donné les résultats suivants :

Matière employée. . . . .	0 <sup>sr</sup> 0705
Hauteur barométrique corrigée. . . . .	757 <sup>mm</sup> 9

(1) Voir à la fin de ce travail la note A.

Volume de l'air déplacé. . . . . 18<sup>cc</sup>

Température à laquelle la lecture a été faite. 20°

D'où  $D = 3,25$ .

La densité théorique est  $D_{th} = 3,20$ .

Le point d'ébullition est de 119° sous la pression atmosphérique de 760<sup>mm</sup>.

Enfin l'analyse élémentaire nous a fourni les nombres suivants :

	I	II	III
	gr	gr	gr
Matière employée. . . . .	0,4285	0,3773	0,3910
Gaz carbonique. . . . .	0,6063	0,5364	0,5558
Eau . . . . .	0,2144	0,1856	0,1901

Le dosage du chlore par la méthode de Carius nous a donné :

	IV	V
	gr	gr
Matière employée . . . . .	0,3902	0,3717
Chlorure d'argent . . . . .	0,6100	0,5807

soit en centièmes :

C. . . . .	38,73	38,80	38,79	»	»
H . . . . .	5,55	5,48	5,42	»	»
Cl . . . . .	»	»	»	38,65	38,62

ce qui conduit à la composition moyenne :

	OBSERVÉ	CALCULÉ pour $C^3H^5ClO$
C. . . . .	38,77	38,92
H . . . . .	5,48	5,40
Cl . . . . .	38,63	38,38
O . . . . .	17,12	17,30
	100,00	100,00

Le corps obtenu est donc bien la monochloracétone.

Ce résultat une fois acquis, nous avons recherché dans quelles conditions il fallait se placer pour obtenir l'acétone monochlorée avec le meilleur rendement possible. Mais en même temps se posait une question nouvelle, celle de savoir si, les conditions expérimentales venant à changer, la nature du produit obtenu ne se modifierait pas aussi.

C'est dans le but de résoudre ce double problème que nous avons entrepris les expériences suivantes :

INFLUENCE DE L'INTENSITÉ DU COURANT. — L'intensité du courant



électrique pouvant à la fois modifier la nature du produit obtenu ainsi que le rendement de la réaction, nous nous sommes tout d'abord occupé de son influence. Si, en effet, l'intensité du courant augmente, la quantité de chlore mise en liberté pendant un temps donné varie de la même façon, et la chloruration de l'acétone peut être telle qu'il y ait production de dérivés plus riches en chlore que la monochloracétone.

Les expériences conduites comme les précédentes nous ont fourni les résultats suivants :

**α. NATURE DU PRODUIT.** — Dans toutes les électrolyses que nous avons faites, nous n'avons jamais observé d'une façon absolument certaine que le même dérivé chloré, la monochloracétone. Bien que l'intensité du courant ait varié de 0<sup>amp.</sup> 4 à 4 ampères, nous avons toujours eu le même résultat.

On peut, à notre avis, donner de ce fait l'interprétation suivante : Lorsque le courant électrique traverse l'électrolyte, l'acide chlorhydrique seul est décomposé, l'hydrogène se dégage à la cathode et le chlore à l'anode. Mais, en ce dernier point, le chlore se trouve en contact avec une solution aqueuse d'acétone, et il se produit la réaction :



L'acétone monochlorée qui prend ainsi naissance se dissout tout d'abord dans l'acétone en excès, mais bientôt après, ce composé étant en proportion plus grande se rassemble au fond du vase et cela d'autant mieux qu'il est insoluble dans l'eau pure ou dans l'acide chlorhydrique et que sa densité est plus grande. La phase inférieure, presque exclusivement formée de monochloracétone, ne se laisse pas traverser par le courant électrique, sort du champ de la réaction et échappe ainsi entièrement à toute réaction ultérieure. Quant à la phase supérieure, elle est conductrice du courant électrique et c'est au sein de ce liquide que la réaction continue.

On conçoit ainsi facilement que si la monochloracétone formée se sépare de l'électrolyte au fur et à mesure de sa production, l'on ne peut obtenir une chloruration plus profonde de l'acétone; et c'est ce qui nous permet de comprendre pourquoi, contrairement aux expériences de M. Müllder, nous n'avons jamais obtenu un composé dichloré de l'acétone. Pour préparer un tel composé, il faudrait, proba-

blement ou bien employer des courants plus intenses que ceux que nous avons utilisés, ou bien opérer de telle façon que la monochloracétone formée d'abord restât en solution dans l'électrolyte et fût soumise à l'action continue du chlore.

Il résulte de ces expériences que la méthode électrolytique nous donne un moyen commode de préparation de la monochloracétone à l'exclusion de tout autre dérivé chloré.

β. RENDEMENT. — Ayant ainsi constaté la nature du produit formé, nous avons cherché comment variait le rendement de la réaction avec l'intensité du courant.

Plusieurs séries d'expériences ont été entreprises, et les calculs des rendements ont été faits de la manière suivante :

Le courant, d'une intensité moyenne déterminée, passe pendant un temps connu dans un électrolyte de composition donnée. On en déduit, par un calcul simple (1), la quantité de chlore mise en liberté pendant ce temps, et, par suite, la quantité d'acétone monochlorée que théoriquement peut donner cette masse de chlore. On détermine d'autre part le poids de monochloracétone brute obtenue expérimentalement et l'on compare ces deux nombres. Pour rendre les expériences plus comparables entre elles, on laisse marcher les expériences pendant un temps suffisant pour que les quantités de chlore dégagées soient sensiblement les mêmes.

C'est ainsi que nous avons calculé les expériences (2) résumées dans le tableau suivant.

Intensité	Chlore dégagé	Monochloracétone (Théor.)	Monochloracétone (Obs.)	Rendement
— amp.	— gr.	— gr.	— gr.	— 0/0
0,810	38,547	50,220	33,510	66,7
1,85	39,130	50,979	37,130	72,8
2,40	38,865	50,633	36,176	71,4
2,725	39,624	51,022	34,807	67,4
3,35	39,854	51,923	33,984	65,4
3,70	38,705	50,425	32,862	65,2

(1) Connaissant la durée  $\tau$  de l'expérience, l'intensité moyenne du courant  $I$  et sachant qu'un ampère met en liberté  $0^r\ 00036728$  de chlore par seconde, on voit que la masse de chlore dégagée est  $m = 0^r\ 00036728 \times I \times \tau$ .

(2) Les expériences du tableau ci-dessus ont été faites sensiblement à la même température, au voisinage de  $15^\circ$ . Remarquons en outre que si les rendements avaient été calculés avec le produit pur, les nombres auraient été un peu inférieurs, mais les rapports de grandeur auraient été sensiblement les mêmes.

Les nombres de ce tableau montrent que le rendement va d'abord en croissant rapidement, atteint un maximum pour une intensité un peu inférieure à 2 ampères et finalement décroît lorsque l'on fait croître l'intensité du courant.

**INFLUENCE DE LA DENSITÉ DU COURANT AUX ÉLECTRODES.** — Les expériences ont été faites avec des électrodes de platine dont les surfaces étaient très différentes : la surface de la cathode était de 52 centimètres carrés et celle de l'anode de 4<sup>cm²</sup> 50. Afin de voir si la densité du courant avait une influence sur le rendement, nous avons repris les expériences précédentes en nous plaçant dans des conditions aussi identiques que possible, mais en intervertissant la place des électrodes, de telle sorte que la lame de platine qui avait servi d'anode devenait la cathode et réciproquement. Il en résultait une diminution notable de la densité du courant à l'anode qui devenait le douzième environ de sa valeur primitive.

Avec ce nouveau dispositif, nous avons obtenu, toutes choses égales d'ailleurs, des rendements très supérieurs aux précédents, comme le montre le tableau suivant :

Intensité —	Chlore dégagé —	Monochloracétone (Théor.) —	Monochloracétone (Obs.) —	Rendement —
amp.	gr.	gr.	gr.	0/0
0,808	38,450	50,093	36,523	72,9
1,352	38,424	51,225	40,227	78,5
1,977	38,587	50,271	41,977	83,5
2,434	37,806	49,254	39,906	81,0
2,80	38,715	50,437	38,784	76,9
3,32	39,498	51,459	37,976	73,8
3,68	38,917	50,700	36,788	72,5

La conclusion à tirer de ces deux séries d'expériences est donc la suivante :

Lorsque l'on voudra augmenter le rendement, il faudra, toutes choses égales d'ailleurs, diminuer la densité du courant à l'anode.

Il est, d'autre part, facile de concevoir ce résultat expérimental : le chlore mis en liberté sur une grande surface, pendant un même temps, se trouve en contact avec une plus grande quantité d'acétone que si la surface de l'anode était petite ; par suite, le poids d'acétone chlorée formée sera plus grand et les pertes en chlore seront moindres.

**INFLUENCE DE LA COMPOSITION DE L'ÉLECTROLYTE.** — L'examen des deux tableaux précédents montre que pour une intensité de courant

voisine de 2 ampères le rendement passe par un maximum. Nous avons cherché alors si en apportant à nos expériences des modifications convenables, nous ne pourrions pas améliorer les rendements.

Nous avons, dans ce but, fait varier la composition du liquide électrolytique, en tenant compte de la remarque suivante.

Si l'on suit, avec un peu d'attention, la marche de l'électrolyse, on voit que, après une durée plus ou moins grande de la réaction, du chlore se dégage à l'état libre, et l'on en est averti par l'odeur caractéristique de ce gaz, odeur qui ne peut être perçue au début de l'expérience. Ce fait s'interprète facilement si l'on remarque que le chlore qui prend naissance pendant un temps donné, trouve au début suffisamment d'acétone pour se combiner, tandis que, vers la fin, l'acétone étant en moindre quantité, une partie de ce gaz peut échapper à toute réaction.

C'est pour éviter cette perte de chlore que nous avons opéré l'électrolyse d'un liquide plus riche en acétone que le précédent, contenant 50 centimètres cubes d'acide chlorhydrique pour 75 centimètres cubes d'acétone.

Nous avons alors obtenu les résultats suivants :

Intensité —	Chlore dégagé —	Monochloracétone (Théor.) —	Monochloracétone (Obs.) —	Rendement —
amp.	gr.	gr.	gr.	0/0
2,850	39,557	51,536	44,772	86,8
3,338	39,713	51,738	48,700	94,1
3,653	38,737	50,467	47,883	94,8
3,928	38,943	50,735	48,341	95,2

Rapprochant ces nombres de ceux qui précèdent, on voit que le rendement est ici très nettement supérieur, ce qui coïncide d'ailleurs avec la disparition de l'odeur du chlore.

D'où la conclusion : si l'on fait croître l'intensité du courant, on doit en même temps augmenter la teneur de l'électrolyte en acétone sous peine de voir diminuer le rendement.

Toutefois, de façon à montrer d'une manière indéniable le rôle que joue ici la composition de l'électrolyte, nous avons fait simultanément un certain nombre d'électrolyses dans lesquelles toutes les conditions (intensité du courant, densité aux électrodes, température) étaient rigoureusement les mêmes; une seule chose variait, la composition de l'électrolyte.

Dans une série d'expériences, nous avons employé deux voltamètres traversés par le même courant à la même température : le premier contenait un liquide composé de parties égales d'acétone et d'acide chlorhydrique, alors que le second était formé de deux parties d'acide pour trois d'acétone. Les intensités des courants ont été respectivement de 0<sup>amp</sup>.85, 1<sup>amp</sup>.82, 3<sup>amp</sup>.65. Les résultats fournis par ces expériences sont concordants entre eux et comparables à ceux obtenus précédemment.

Il suffit pour s'en convaincre de comparer les tableaux précédents avec le suivant.

Intensité. —	VOLTAMÈTRE I.		VOLTAMÈTRE II.	
	Monochloracétone. (Observ.)	Rendement.	Monochloracétone. (Observ.)	Rendement.
Amp.	gr.	0/0	gr.	0/0
0,85	38,229	71,5	41,051	76,7
1,82	38,401	79,3	45,267	93,4
3,65	36,803	72,1	48,082	95,7

Un nouveau groupe d'expériences a été aussi tenté en étendant d'eau l'acide employé et prenant un volume d'eau pour deux volumes d'acétone et deux d'acide chlorhydrique. La dilution de l'acétone étant plus grande, il était à prévoir que le rendement serait moindre. C'est ce que l'expérience a confirmé de tous points, comme le montrent les nombres suivants :

Intensité.	Monochloracétone.	Rendement.
—	—	—
Amp.	gr.	0/0
0,90	15,008	44,3
1,85	16,695	47,2
3,85	21,963	53,6

Ces résultats suffisent pour bien mettre en évidence le rôle que joue la composition de l'électrolyte dans le rendement en monochloracétone lorsqu'on fait varier l'intensité du courant.

Dans le cours de ces recherches, nous avons été conduit à faire une remarque : le liquide obtenu est en général absolument limpide, la couche inférieure est à peine colorée en jaune. Cependant, à mesure que l'intensité du courant augmente, la coloration de l'électrolyte s'accuse plus fortement, et cela d'autant plus que la concentration de la liqueur est plus grande ; le liquide brut est par suite sensiblement

plus pur lorsque la liqueur est étendue que lorsqu'elle est concentrée (1).

Il en résulte par conséquent que, si au point de vue du rendement en monochloracétone, on a intérêt à opérer avec un électrolyte riche en acétone, au point de vue de la pureté du produit brut, il vaut mieux opérer en liqueur étendue.

**INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE.** — Dans les expériences précédentes, il n'y a pas seulement coloration de l'électrolyte lorsqu'on fait croître l'intensité du courant, il y a en même temps tendance à une élévation de température malgré le courant d'eau qui circule tout autour de l'électrolyte. C'est ainsi, par exemple, que dans une expérience où l'intensité du courant était de 3<sup>amp</sup>.65, la température du courant d'eau étant de 16°, un thermomètre plongé dans l'électrolyte, au-dessus de la couche d'acétone chlorée, accusait une température de 26°. Il y avait donc entre le courant d'eau et l'électrolyte une différence de température de 10°.

Cet échauffement de l'électrolyte que nous constatons ainsi, nous amène à considérer l'influence que peut avoir la température sur la réaction étudiée.

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, toutes nos expériences précédentes ont été faites en maintenant le voltamètre dans un courant d'eau froide au voisinage de 15°. Nous avons cherché ce qui arriverait si nous refroidissions plus profondément l'électrolyte ou si, au contraire, nous laissions la température s'élever.

La première expérience a été faite en refroidissant l'électrolyte par de l'eau maintenue à 0° par de la glace fondante. Elle nous a fourni les résultats suivants :

Composition de l'électrolyte. . .	{ 50 gr. acide chlorhydrique.
	{ 75 gr. acétone.
Intensité du courant. . . . .	3 amp. 68.
Poids du produit brut. . . . .	42 gr. 962.
Rendement. . . . .	90 %.

Si, au contraire, avec un électrolyte de même composition, on ne refroidit ni par de la glace ni même par un courant d'eau, le dérivé

(1) La coloration de l'acétone chlorée obtenue est vraisemblablement due à la formation de dérivés plus riches en chlore que la monochloracétone, mais ils existent en quantités trop faibles pour qu'ils puissent être isolés.

chloré obtenu est beaucoup plus coloré que les précédents, et la masse noircit à mesure que la réaction se produit. Mais en même temps on constate une élévation progressive de la température qui finit par atteindre 64°.

Le produit brut ne pèse que 17 gr. 525, ce qui donnerait un rendement de 36 % si le corps était de la monochloracétone pure. Or ici il n'en est plus comme dans les expériences précédentes : si l'on distille la matière colorée obtenue, on ne recueille qu'un très petit nombre de centimètres cubes de monochloracétone et il reste dans le ballon un résidu noir très abondant dont on n'a pu déterminer la nature.

Nous croyons inutile de citer d'autres expériences faites dans ce même ordre d'idées, car elles mettent toutes en évidence de la même façon l'influence nuisible d'une trop grande élévation de la température.

Il est d'ailleurs facile de concevoir ces résultats, si l'on remarque que l'acide chlorhydrique chauffé en présence d'acétone ou de monochloracétone donne naissance à un corps noir déjà observé lorsque nous avons voulu distiller les produits de la réaction sous la pression atmosphérique.

Il résulte de là qu'il faut, avant tout, éviter l'échauffement de l'électrolyte. Or, il y a deux causes à cette élévation de température : d'abord une cause chimique due aux réactions de diverses natures qui se produisent en dégageant de la chaleur, puis une cause physique due au passage du courant au sein de l'électrolyte (effet Joule). Ces dégagements de chaleur sont d'ailleurs d'autant plus grands que l'intensité du courant est plus grande. Il faudra par suite refroidir l'électrolyte avec d'autant plus de soin que l'on prendra des courants plus intenses. Mais, dans la pratique, si l'on n'utilise que des courants de 1 ampère à 2 ampères, le procédé de refroidissement que nous avons employé dans la plupart de nos expériences est parfaitement suffisant.

**ACTION DE L'HYDROGÈNE NAISSANT.** — Un dernier point reste à élucider ; c'est celui qui a trait à la critique adressée à la méthode électrolytique par M. Ch. Cloez. Nous avons dit en effet que, d'après ce savant, si une partie assez grande de l'acétone échappe à la réaction, ce serait l'hydrogène naissant qui causerait la diminution du rendement ; ce gaz réduirait la monochloracétone déjà fournie et redonnerait de l'acétone et de l'acide chlorhydrique.

Désireux de savoir ce qu'il pouvait y avoir de vrai dans cette critique, nous avons institué toute une série de recherches comparatives. Elles ont été faites pour la plupart de la façon suivante :

Deux vases électrolytiques, placés côte à côte dans le même bain d'eau froide, sont traversés par le même courant électrique. Les densités du courant aux électrodes sont les mêmes. La seule différence réside dans ce fait que dans l'un des voltamètres l'anode et la cathode sont séparées l'une de l'autre par un vase poreux, alors que dans le second il n'y a aucune séparation. Dans ce dernier appareil, l'hydrogène naissant peut réagir sur le dérivé chloré formé, alors que dans le premier l'hydrogène se dégage au sein d'un liquide ne contenant ni acétone ni chloracétone, ces deux corps se trouvant seulement au voisinage de l'anode. La différence de poids des composés chlorés obtenus doit permettre d'avoir une première idée du rôle de l'hydrogène naissant. Or, dans la plupart des expériences faites, le produit brut obtenu est un peu plus grand dans le second cas que dans le premier. L'hydrogène ne semble donc pas avoir d'action sur la monochloracétone puisque c'est dans l'électrolyte traversé par l'hydrogène que l'on a une plus grande quantité du produit chloré brut. Remarquons toutefois que lorsque l'on a purifié ces produits par distillation et dessiccation sur le chlorure de calcium fondu, ces poids sont sensiblement les mêmes.

Ces résultats étant en contradiction avec l'hypothèse de M. Ch. Cloez, nous avons tenu à en avoir une nouvelle démonstration en employant une autre méthode. Nous avons pour cela utilisé le procédé indiqué par M. OETTEL <sup>(1)</sup> comme permettant de se rendre compte de ce qui se passe au sein d'un voltamètre traversé par un courant électrique.

Le principe de cette méthode est le suivant :

Si l'hydrogène qui prend naissance dans une réaction électrolytique quelconque, produit une action secondaire dans laquelle cet hydrogène entre en combinaison, on recueillera d'autant moins de ce gaz que la réaction secondaire se produira en plus grande quantité. Si donc on mesure le volume de l'hydrogène qui se dégage et si l'on constate des pertes par rapport à l'hydrogène théorique, c'est que des réactions secondaires se sont produites dans l'électrolyse étudiée.

(<sup>1</sup>) OETTEL, *Zeitschrift für Elektrotechnik und Elektrochemie*, t. I, p. 354, 1894.



Pour mettre en pratique une telle méthode, il suffit de placer dans le circuit électrique, à la suite des appareils ordinaires, un voltamètre à gaz tonnant et de recueillir ce gaz en même temps que celui qui provient de l'appareil électrolytique.

Dans le cas actuel, si l'hydrogène qui se dégage dans la préparation de la monochloracétone, est en quantité moindre que les deux tiers du volume du gaz tonnant recueilli pendant le même temps, c'est que l'hydrogène réduit partiellement la monochloracétone formée. Si, en outre, on fait ces déterminations à intervalles réguliers, on a la possibilité de suivre d'une manière très approchée la marche de la réaction.

C'est cette méthode que nous avons employée, et qui nous a donné des résultats en tous points conformes à ceux que nous venons d'indiquer : le poids brut du dérivé chloré est légèrement supérieur (dans le cas où l'on n'a pas de séparation entre l'anode et la cathode) à celui que l'on obtient en séparant les liquides anodique et cathodique, et d'autre part, le volume de l'hydrogène recueilli est, aux erreurs d'expérience près, identique à celui que fournit pendant le même temps un voltamètre à gaz tonnant intercalé dans le circuit.

Voici, en particulier, le détail de trois expériences faites dans des conditions semblables, avec la même composition du liquide électrolytique, mais en faisant varier les intensités du courant.

### Expérience I

Composition de l'électrolyte { Acétone. . . . . 50<sup>cc</sup>  
Acide chlorhydrique. 50<sup>cc</sup>  
Eau. . . . . 25<sup>cc</sup>

Durée de l'électrolyse : 24 heures. Température moyenne : 17°

Heure de l'observation.	Intensité. —	Gaz tonnant. —	Hydrogène. (Th.)	Hydrogène. (Observ.)	Perte. —
	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
3 »	1,05	42,5	28,2	28,2	0,0
3 30	1,05	45,6	30,4	30,2	0,2
4 »	1,05	46,4	30,8	30,8	0,0
4 30	1,04	45,8	30,4	30,0	0,4
5 »	1,05	47,5	31,6	31,6	0,0
5 30	1,05	46,7	31,0	30,9	0,1
6 »	1,05	43,5	29,0	29,0	0,0
» »	» »	» »	» »	» »	» »
8 »	1 05	47,7	31,8	31,5	0,3
8 30	1,03	46,4	30,8	30,5	0,3
9 »	1,03	45,8	30,4	30,3	0,1

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz tonnant.	Hydrogène. (Th.)	Hydrogène. (Obs.)	Perte.
—	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
9 30	1,04	45,6	30,4	30,4	0,0
10 »	1,03	46,4	30,8	31,1	0,3
» »	» »	» »	» »	» »	» »
1 30	1,03	44,3	29,4	29,5	— 0,1
2 »	1,05	43,7	29,0	29,1	— 0,1
2 30	1,05	46,2	30,8	30,7	0,1
3 »	1,05	45,3	30,2	30,4	— 0,2

Les volumes gazeux ont été mesurés à la température de 17°. Le gaz sortant de l'appareil était abandonné dans une cuve à eau pendant une demi-heure environ et mesuré lorsqu'il avait pris la température de la cuve.

Dans de nombreux cas, ce gaz a été soumis à l'analyse eudiométrique. Voici un exemple de ces analyses :

i. — Avant étincelle. . . . .	Gaz étudié. . . . .	14°0
	Oxygène. . . . .	9°
Après étincelle. . . . .	Résidu (oxygène). . . . .	2°
ii. — Avant étincelle. . . . .	Gaz étudié. . . . .	11°4
	Oxygène. . . . .	12°4
Après étincelle. . . . .	Résidu . . . . .	6°4

Le gaz analysé est bien de l'hydrogène pur.

## Expérience II

*Composition de l'électrolyte :* La même que dans l'expérience précédente.

Durée de l'électrolyse : 16 heures.

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz tonnant.	Hydrogène. (Th.)	Hydrogène. (Observ.)	Perte.
—	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
8 30	1,53	47,5	31,6	31,6	0,0
9 »	1,53	48,8	32,4	32,7	— 0,3
9 30	1,53	49,5	33 »	33 »	0,0
10 »	1,55	48,6	32,4	32,6	— 0,2
» »	» »	» »	» »	» »	» »
1 30	1,54	46,5	31,0	30,7	0,3
2 »	1,54	48,5	32,2	31,8	— 0,4
2 30	1,54	49,1	32,6	32,5	0,1
3 »	1,50	47 »	31,2	31 »	0,2
3 30	1,50	49,1	32,6	32,5	0,1

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz tonnant.	Hydrogène. (Th.)	Hydrogène. (Obs.)	Perte.
—	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
4 »	1,50	47,5	31,6	31,2	0,4
4 30	1,55	49,9	33,2	33,2	0,0
5 »	1,55	49,4	32,8	33,1	— 0,3
5 30	1,55	48,8	32,4	32,8	— 0,4
6 »	1,45	48,3	32,2	32,3	— 0,1
( <sup>1</sup> ) 6 30	1,45	48,1	32 »	32,3	— 0,3
( <sup>2</sup> ) 8 »	1,50	50,4	33,6	33,6	0,0
8 30	1,50	48,9	32,6	32,6	0,0
9 »	1,55	50,1	33,4	33,5	— 0,1
9 30	1,50	49,3	32,8	32,8	0,0
10 »	1,50	47,2	31,4	31,8	— 0,4
» »	» »	» »	» »	» »	» »
1 30	1,50	47 »	31,2	31,8	— 0,6
2 »	1,50	47,6	31,6	31,6	0,0
Arrêt.					

### Expérience III

*Composition de l'électrolyte : La même que dans l'expérience précédente.*

*Durée de l'électrolyse : 7 heures.*

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz tonnant.	Hydrogène. (Th.)	hydrogène. (Observ.)	Perte.
—	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
9 30	3,40	48,2	32,0	32,0	0,0
10 »	3,40	48 »	32,0	31,7	0,3
10 30	3,40	48,5	32,2	32,0	0,2
11 »	3,40	48,3	32,2	32,2	0,0
11 30	3,40	49,9	33,2	32,9	0,3
» »	» »	» »	» »	» »	» »
1 »	3,45	49,9	33,2	33,0	0,2
1 30	3,45	49,7	33,0	33,3	— 0,3
2 »	3,40	49,5	33,0	33,3	— 0,3
2 30	3,35	49 »	32,6	32,7	— 0,1
3 »	3,40	48,9	32,6	33,0	— 0,4
3 30	3,40	50,1	33,4	33,3	0,1
4 »	3,35	51,5	34,4	34,2	0,2
4 30	3,35	46,3	30,8	31,0	— 0,3
Arrêt.					

Ces expériences sont suffisamment concordantes pour que nous puissions affirmer que l'hydrogène naissant est, dans les conditions où les électrolyses ont été effectuées, absolument sans action chimique sur la monochloracétone formée.

(<sup>1</sup>) Interruption de l'expérience.

(<sup>2</sup>) Nouvelle mise en marche de l'expérience.

Remarquons toutefois que, si cette absence d'action de l'hydrogène sur la monochloracétone est actuellement hors de doute, la méthode électrolytique ne peut entièrement échapper à la critique de M. Cloez. Ce savant constate en effet que l'on ne saurait convertir par voie électrolytique un poids donné d'acétone en monochloracétone; il y a toujours des pertes, mais elles ne sont pas dues à l'hydrogène naissant. Une partie de l'acétone est en effet perdue par entraînement avec l'hydrogène qui se dégage et cela d'autant plus facilement que la température est plus élevée.

Nous pouvons en outre ajouter que, si l'on voulait transformer intégralement un poids donné d'acétone en monochloracétone, on devrait faire passer le courant électrique pendant un temps très long; mais alors le rendement en monochloracétone, calculé par rapport au chlore dégagé, c'est-à-dire par rapport à la quantité d'électricité dépensée, irait en diminuant. C'est d'ailleurs ce qu'ont montré quelques expériences faites pour résoudre ce problème.

Dans ces électrolyses, en effet, lorsque l'on a atteint un certain rendement, que le liquide électrolytique s'est appauvri en acétone, une partie du chlore mis en liberté se dégage sans réagir. Si on laisse passer le courant pendant un temps plus long, on perd d'un côté plus qu'on ne gagne de l'autre. Aussi nous arrêtons toujours nos électrolyses lorsque la résistance du liquide devient trop grande et que l'odeur du chlore est trop manifeste.

Voici une expérience qui montre très nettement la vérité de ce que nous venons d'affirmer.

L'électrolyse considérée a été faite sans emploi de vase poreux avec la composition suivante de l'électrolyte :

Acétone. . . . .	50 <sup>cc</sup>
Acide chlorhydrique. . . . .	50 <sup>cc</sup>
Eau. . . . .	25 <sup>cc</sup>

Le courant électrique a une intensité moyenne de 1<sup>amp</sup>15 et la durée de l'expérience est de 30 heures.

Dans ces conditions, après avoir traité le produit brut par la méthode ordinaire de purification, nous avons obtenu un corps pesant 32<sup>gr</sup>867.

Calculant alors le rendement de cette expérience, d'abord par rapport au chlore dégagé et ensuite par rapport à l'acétone employée, nous avons trouvé les résultats suivants :

- . — Rendement par rapport au chlore dégagé. 50,4 %.
- II. — Rendement par rapport à l'acétone. . . . 51,4 %.

Ces nombres sont inverses de ceux que l'on obtient dans toutes les expériences faites plus haut, expériences dans lesquelles le rendement calculé par rapport au chlore dégagé est toujours supérieur à celui qui est obtenu par rapport à l'acétone.

ÉTUDE CALORIMÉTRIQUE. — L'étude de la chloruration de l'acétone nous a suggéré l'idée qu'il serait intéressant de connaître les données thermiques de la monochloracétone, et nous avons, dans ce but, essayé de déterminer dans la bombe calorimétrique la chaleur de combustion de ce dérivé chloré.

On sait combien de causes d'erreur se présentent dans cette détermination; combien, en particulier, il est difficile de réaliser un état final absolument défini. Pour y parvenir, M. Berthelot indique une méthode qui permettrait d'arriver presque à coup sûr à remplir ce desideratum. Ce procédé consiste à mettre dans la bombe une certaine quantité (20 ou 40<sup>cc</sup>) d'une solution titrée d'acide arsénieux dans l'acide chlorhydrique. Le chlore mis en liberté dans la combustion oxyde l'acide arsénieux et se transforme en acide chlorhydrique. C'est cette méthode, la seule qui, d'après M. Berthelot, fournisse des résultats *au moins approchés*, que nous avons utilisée dans les expériences actuelles.

Deux séries d'expériences ont été faites à un an d'intervalle sur des produits purs et récemment distillés, et les deux groupes de résultats obtenus sont aussi concordants que possible dans des recherches de ce genre. Il y a même, dans ces deux séries, des nombres identiques.

Tableau I

Masse en eau de la bombe (accessoires...).	2460			
Poids de matière . . . . .	19 <sup>g</sup> 1787	19 <sup>g</sup> 3430	19 <sup>g</sup> 2444	19 <sup>g</sup> 3422
Durée de l'expérience. . . . .	13 <sup>m</sup>	13 <sup>m</sup>	13 <sup>m</sup>	12 <sup>m</sup>
Élévation de température brute . . . . .	2 <sup>o</sup> 090	2 <sup>o</sup> 360	2 <sup>o</sup> 210	2 <sup>o</sup> 370
Élévation de température corrigée . . . . .	2 <sup>o</sup> 119	2 <sup>o</sup> 378	2 <sup>o</sup> 226	2 <sup>o</sup> 380
Chaleur dégagée . . . . .	5214 <sup>o</sup> 4	5851 <sup>o</sup> 9	5477 <sup>o</sup> 9	5856 <sup>o</sup> 7
Chaleur corrigée . . . . .	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 10px;"> <math>\left\{ \begin{array}{l} \text{Fer} \\ \text{As}^2\text{O}^3 \\ \text{AzO}^3\text{H} \end{array} \right.</math> </div> <div> <div>426<sup>o</sup>8</div> <div>128<sup>o</sup>4</div> <div>127<sup>o</sup>6</div> <div>126<sup>o</sup>6</div> </div> </div>			
	5087 <sup>o</sup> 6	5723 <sup>o</sup> 5	5350 <sup>o</sup> 3	5730 <sup>o</sup> 1
Soit pour 1 gr. . . . .	4316 <sup>o</sup> 3	4261 <sup>o</sup> 8	4299 <sup>o</sup> 6	4269 <sup>o</sup> 2
Moyenne pour 1 gr. . . . .	4286 <sup>o</sup> 7			
Soit pour une molécule (92 <sup>o</sup> 5) . . . . .	396 <sup>o</sup> 5 à volume constant et à pression constante.			

Tableau II

Masse en eau de la bombe (accessoires...) . . .	2326	2326	2346
Poids de matière. . . . .	19 <sup>r</sup> 3438	19 <sup>r</sup> 2821	19 <sup>r</sup> 3412
Durée de l'expérience . . . . .	13 <sup>m</sup>	13 <sup>m</sup>	13 <sup>m</sup>
Élévation de température brute . . . . .	2 <sup>o</sup> 461	2 <sup>o</sup> 380	2 <sup>o</sup> 455
Élévation de température corrigée. . . . .	2 <sup>o</sup> 484	2 <sup>o</sup> 404	2 <sup>o</sup> 475
Chaleur dégagée. . . . .	5858 <sup>c</sup> 1	5591 <sup>c</sup> 6	5805 <sup>c</sup> 4
Chaleur corrigée . $\left\{ \begin{array}{l} \text{Fer} \\ \text{As}^{\text{O}}\text{O}^3 \\ \text{AzO}^{\text{O}}\text{H} \end{array} \right.$ . . . . .	137 <sup>c</sup> 8	133 <sup>c</sup> 7	134 <sup>c</sup> 5
	5720 <sup>c</sup> 3	5457 <sup>c</sup> 9	5673 <sup>c</sup> 9
Soit pour 1 gr. . . . .	4260 <sup>c</sup>	4257 <sup>c</sup>	4230 <sup>c</sup> 5
Moyenne pour 1 gr. . . . .	4249 <sup>c</sup>		
Soit pour une molécule (92 <sup>o</sup> 5) . . . . .	393 <sup>c</sup> 0		

Les deux nombres que nous venons de trouver comme moyennes de nos deux séries d'expériences diffèrent l'un de l'autre de 3<sup>c</sup>5.

Il nous a paru nécessaire de voir d'un peu près quelle valeur relative il fallait attribuer à ces nombres, attendu que c'est de la valeur admise pour la chaleur de combustion que nous aurons à partir pour en déduire la chaleur de formation de la monochloracétone depuis les éléments, ainsi que la chaleur de substitution du chlore à l'hydrogène dans l'acétone elle-même.

Faisons tout d'abord une remarque : on pourrait s'étonner de voir dans ces deux séries d'expériences prendre la moyenne des nombres trouvés, alors surtout que les nombres, comme dans le premier tableau, diffèrent de 50<sup>c</sup> sur 4300<sup>c</sup>. Nous avons tout d'abord hésité ; mais des considérations de natures différentes nous ont engagé à opérer comme nous l'avons fait.

Considérons en premier lieu les travaux des chimistes qui se sont occupés de déterminations calorimétriques analogues aux précédentes, et cherchons quelles différences maxima ils ont acceptées entre les nombres résultant de leurs expériences. Examinons en particulier un mémoire de M. Rivals<sup>(1)</sup> où ce chimiste étudie les chaleurs de combustion d'un certain nombre de dérivés chlorés. Nous pourrions relever dans un tableau identique aux précédents quatre nombres

(1) P. RIVALS, *Ann. de Chim. et Phys.*, 7<sup>e</sup> série, t. XII, p. 501 (1897).

donnant la chaleur de combustion de l'acide orthomonochlorobenzoïque. Ces nombres sont les suivants :

	4667° 5
Pour 1 gr. de $C^7H^5ClO^2$ . . . .	4718° 6
	4689° 2
	4698° 6
dont la moyenne est :	4693° 6

Adoptant cette moyenne comme chaleur de combustion, M. Rivals trouve que la chaleur de combustion moléculaire, à volume constant et à pression constante de l'acide considéré est de 734° 5.

Or les nombres extrêmes donneraient pour cette chaleur de combustion moléculaire les deux valeurs : 730° 4 et 738° 4.

Il en résulte par suite que la chaleur de combustion ainsi déterminée ne peut être considérée comme connue qu'avec une approximation de 3° ou 4° environ.

L'approximation sera encore moindre si le poids moléculaire de la substance brûlée est plus considérable.

Il est d'ailleurs assez facile de voir que l'on ne saurait demander à cette méthode une plus grande précision, à cause des nombreuses corrections que l'on est obligé de faire, et aussi à cause de la masse en eau si considérable de la bombe et des accessoires.

La masse en eau du système a été, dans nos expériences, déterminée par la combustion d'un poids connu de camphre ou de naphthaline, et cela en modifiant en outre la quantité d'eau contenue dans le calorimètre. Le nombre adopté est la moyenne des expériences les plus concordantes. Mais, de ce chef, apparaît une première cause d'erreur, et celle-ci se trouvera multipliée par 2 ou par 3 suivant l'élévation de température observée.

En outre, une légère erreur dans l'évaluation de la température amène encore une différence avec le nombre théorique. (Dans nos expériences, une erreur de 0° 005 amène une erreur de 12° 1.)

Enfin les corrections de température et celles faites sur la chaleur observée donnent encore de légères variations qui permettent d'excuser les différences que nous avons signalées.

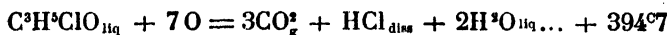
Quoi qu'il en soit, ces restrictions faites, nous avons pu déduire des nombres trouvés la chaleur de formation de la monochloracétone à

partir des éléments, et aussi la chaleur de substitution du chlore à l'hydrogène dans l'acétone ordinaire.

Nous ferons ces calculs en prenant pour chaleur de combustion moléculaire la moyenne des deux nombres que nous avons trouvés, soit :

$$394^{\circ}7$$

L'équation de la combustion du corps peut être écrite :



On en déduit, en admettant pour les calculs les chaleurs de formations suivantes :

$$\text{CO}_2 \dots + 94^{\circ}3; - \text{H}^2\text{O}_{\text{liq}} \dots + 69^{\circ}; - \text{HCl}_{\text{diss}} \dots + 39^{\circ}4; - \\ \text{HCl}_g \dots + 22^{\circ} -.$$

I. — Chaleur de formation de  $\text{C}^3\text{H}^5\text{ClO}$ , à partir des éléments (carbone diamant) :

$$Q_1 = 460,3 - 394,7 = 65^{\circ}6.$$

II. — Chaleur de substitution du chlore dans l'acétone sèche déduite de l'équation :

$$\text{C}^3\text{H}^6\text{O}_{\text{liq}} + \text{Cl}_2 = \text{C}^3\text{H}^5\text{ClO}_{\text{liq}} + \text{HCl}_g \dots + Q_2 \\ Q_2 = 65,6 + 22 - 63^{(1)} = 24^{\circ}6.$$

III. — Chaleur de substitution du chlore dans l'acétone dissoute :

$$\text{C}^3\text{H}^6\text{O}_{\text{diss}} + \text{Cl}_2 = \text{C}^3\text{H}^5\text{ClO}_{\text{liq}} + \text{HCl}_{\text{diss}} \dots + Q_3 \\ Q_3 = 65,6 + 39,4 - 63,5 = 41^{\circ}5.$$

Le second de ces nombres est très voisin de celui que M. Rivals a trouvé pour la substitution du chlore à l'hydrogène dans l'aldéhyde éthylique.

Quant au dernier, il permet de se rendre compte du grand dégagement de chaleur que l'on observe dans la chloruration de l'acétone et explique pourquoi il est nécessaire de refroidir l'appareil où s'effectue la réaction.

Enfin nous avons cherché ce qui arriverait au point de vue thermique si l'hydrogène réagissait sur la monochloracétone en donnant de l'acétone et de l'acide chlorhydrique.

Nous avons ainsi trouvé que l'on aurait encore affaire à une réaction

(<sup>1</sup>) Le nombre 63° admis pour l'acétone est celui qui résulte d'expériences récentes dues à M. Delépine, *Ann. de Chim. et de Phys.*, sér. 7, t. XXI, p. 289.



exothermique; mais la chaleur dégagée serait moindre que celle fournie par la réaction inverse; elle ne serait que de 37°3 en admettant que l'acide chlorhydrique est à l'état dissous et de 19°4 dans le cas où l'acide serait gazeux.

### B. — Electrolyse de l'Acide bromhydrique en présence de l'Acétone ordinaire.

Presque tous les chimistes<sup>(1)</sup> qui ont essayé d'obtenir des dérivés bromés de l'acétone se sont adressés à l'action directe du brome sur l'acétone. Si l'on met en effet ces deux corps en présence, il se produit une combinaison immédiate avec un vif dégagement de chaleur. Mais ici, plus encore peut-être que pour les dérivés chlorés, la séparation des corps qui ont pris naissance est très pénible. L'action de la chaleur sur les dérivés bromés provoque assez facilement leur décomposition; il se forme dans la cornue un corps noirâtre assez abondant, en même temps qu'il se dégage de l'acide bromhydrique. Par suite, les rendements sont toujours très faibles, surtout si l'on veut obtenir un composé défini à l'état pur.

La méthode électrolytique que nous avons employée, supprime en grande partie ces inconvénients, mais à la condition de s'en tenir à la préparation de l'acétone monobromée.

M. Riche<sup>(2)</sup> est le seul chimiste qui ait essayé d'obtenir les dérivés bromés de l'acétone par voie électrolytique; et encore faut-il remarquer qu'il n'a fait qu'indiquer la réaction. Après avoir, en effet, étudié l'électrolyse de l'acide chlorhydrique en présence de l'acétone, il ajoute : « *La solution d'acide bromhydrique se comporte de la même façon avec l'acétone; une huile se dépose au bout de quelques heures.* »

Cette huile, qui n'était autre que la monobromacétone impure, ne put être étudiée par M. Riche, car, après avoir essayé de la purifier par distillation et par agitation avec du massicot, il ne lui resta qu'une très faible quantité de matière qui ne tarda pas à brunir par suite de sa décomposition; il put simplement constater qu'il avait obtenu un

(1) LINNEMANN, *Liebig's Annalen*, t. CXXV, p. 307.

EMMERLING, *Liebig's Annalen*, t. CCIV, p. 29.

(2) RICHE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

composé analogue à la monochloracétone, savoir : la *Monobromacétone* ( $\text{CH}^3\text{-CO-CH}^2\text{Br}$ ).

En présence de cette expérience de M. Riche d'une part, et des résultats obtenus pour la monochloracétone, nous avons appliqué à la préparation des dérivés bromés de l'acétone la méthode qui nous a si bien réussi dans la chloruration de l'acétone.

Si, à une solution concentrée d'acide bromhydrique pur marquant 65° Baumé (50° par exemple), on ajoute une quantité convenable d'acétone pure (75°), on constate un vif dégagement de chaleur. L'élévation de température peut porter le mélange de la température de 16° à 58° environ. Il y a en même temps noircissement de la masse. Lorsque le liquide abandonné à lui-même a repris la température du laboratoire, on le soumet pendant vingt-quatre heures à l'action d'un courant électrique dont l'intensité moyenne est de 0<sup>amp</sup>.9. Si l'on ne refroidit pas le voltamètre, on constate une élévation progressive de la température jusqu'à environ 44°.

L'expérience terminée, on trouve que le liquide s'est divisé en deux couches plus ou moins colorées; en même temps une matière noire, visqueuse, adhère aux parois du récipient. L'odeur émise par le liquide est beaucoup plus vive que celle dégagée par la monochloracétone.

Le produit brut ainsi obtenu est soumis à une distillation fractionnée, sous pression réduite, en présence d'eau. Le liquide qui se condense se divise en deux couches sensiblement incolores qu'il est facile de séparer par simple décantation.

Le liquide le plus dense est constitué par un dérivé bromé qui a été desséché sur du chlorure de calcium fondu et enfin soumis à l'analyse.

Le dosage du brome nous a donné les résultats suivants :

I. Poids de matière. . . . .	0 <sup>gr</sup> 9190
Bromure d'argent . . . . .	1,2670
II. Poids de matière . . . . .	0,8351
Bromure d'argent . . . . .	1,1542

D'où, en centièmes :

	I	II	Calculé pour $\text{C}^3\text{H}^5\text{BrO}$
Br %	58,67	58,80	58,36

Le corps analysé est donc la monobromacétone. L'examen des propriétés de ce corps conduit à la même conclusion.

Le point d'ébullition n'a pu être déterminé sous la pression atmosphérique, car ce dérivé ne peut, dans ces conditions, bouillir sans décomposition.

Enfin la densité de vapeur prise par la méthode de Meyer donne les résultats suivants :

Matière employée. . . . .	0,0621
Hauteur barométrique corrigée. . . . .	767 <sup>mm</sup>
Volume de l'air déplacé. . . . .	11 <sup>cc</sup> 5
Température à laquelle la lecture a été faite	20°

D'où :  $D = 4,61$

La densité théorique est de  $D = 4,74$

Cela étant, nous avons cherché à obtenir cette monobromacétone dans les meilleures conditions possible, mais en tenant compte des résultats fournis par l'étude de la monochloracétone.

C'est ainsi que nous avons toujours opéré avec une densité de courant très faible à l'anode. Nous avons de même toujours mis dans l'électrolyte une quantité suffisante d'acétone, de façon à éviter des pertes de brome ou bien de façon à empêcher la formation de dérivés de l'acétone plus riches en brome que la monobromacétone. Nous avons pu observer en effet dans un certain nombre d'électrolyses que, à un moment donné, alors que l'expérience durait depuis un certain temps, l'électrolyte prenait une teinte rougeâtre, annonçant ainsi une dissolution du brome dans la liqueur. Il était alors à craindre que ce brome libre venant au contact de la monobromacétone déposée ne la transformât en dérivé polybromé. Aussi nous avons toujours arrêté nos expériences dès que cette teinte rouge apparaissait.

Dans ces conditions, nous avons toujours obtenu le même composé, la monobromacétone.

Pour faciliter la séparation du dérivé bromé du liquide dans lequel il prend naissance, il est avantageux de prendre de l'acide bromhydrique convenablement étendu. Outre ce bénéfice, l'addition d'eau permet d'avoir un liquide plus pur. Lorsque, en effet, on ajoute à l'acétone pure et sèche de l'acide concentré marquant 65° Baumé, la masse brunit et la coloration persiste. Au contraire, en opérant en liqueur

plus étendue, la coloration est moindre et disparaît même totalement au cours de la réaction. De plus, pendant l'électrolyse, la température a moins de tendance à s'élever, ce qui permet dans bien des cas de ne pas avoir à refroidir l'électrolyte par un courant d'eau.

La plupart de nos expériences ont été faites en prenant comme liquide anodique : 75 centimètres cubes d'acétone pure, 25 centimètres cubes d'acide bromhydrique à 65° Baumé, et 25 centimètres cubes d'eau.

L'intensité du courant a varié de 0<sup>amp.</sup> 9 à 3<sup>amp.</sup> 30, et les rendements ont oscillé entre 73,5 p. 100 et 92,7 p. 100.

Lorsque l'électrolyse de l'acide bromhydrique était effectuée sans l'emploi d'un vase poreux séparant l'anode de la cathode, le rendement était toujours faible. Aussi, dans le but de l'accroître, nous avons recherché si l'hydrogène naissant n'était pas la cause de ce déficit. Tout en laissant identiques les autres données du problème, nous avons fait deux expériences simultanées ne différant que par un point, l'emploi ou non d'un vase poreux. Avec une intensité moyenne de 1<sup>amp.</sup> 75, on a, après quinze heures d'électrolyse, obtenu les résultats :

1°	Voltamètre sans vase poreux . . .	31 <sup>gr</sup> 625 (dérivé bromé)
2°	— avec —	49 <sup>gr</sup> 495 —

Remarquons en outre que le dérivé bromé obtenu dans le second cas était plus pur que le premier.

D'ailleurs, la marche de l'électrolyse permet presque de prévoir ces résultats. En effet, si l'on n'utilise pas de vase poreux, la température s'élève plus que dans le cas contraire, la coloration de l'électrolyte est plus grande, et la séparation du liquide en deux phases se fait moins nettement.

Enfin, pour mettre en évidence d'une façon plus manifeste l'influence nuisible de l'hydrogène naissant, nous avons, comme pour la monochloracétone, utilisé la méthode d'OETTEL.

Le tableau suivant fournit à ce sujet des résultats tout à fait probants.

## Préparation de la Monobromacétone.

<i>Composition de l'électrolyte.</i>	Acétone . . . . .	75 <sup>cc</sup>
	Acide bromhydrique . .	25 <sup>cc</sup>
	Eau . . . . .	25 <sup>cc</sup>

Durée de l'électrolyse. . . 14 heures.

Température moyenne . . 24°

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz tonnant.	Hydrogène. (th.)	Hydrogène. (obs.)	Perte.
—	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
8 <sup>h</sup> »	1,50	46,5	31,0	31,0	0,0
9 »	1,50	49,3	32,9	19,5	13,4
9 30	1,55	46,8	31,2	15,8	15,4
10 »	1,40	47, »	31,4	12,9	18,5
10 30	1,45	47,5	31,7	11,5	20,2
11 »	1,45	47,5	31,7	10,2	21,5
»	»	»	»	»	»
2 »	1,45	46, »	30,7	9, »	21,7
2 30	1,45	46,2	30,8	8,1	22,7
3 »	1,48	50, »	33,4	8,1	25,3
3 30	1,49	47,2	31,5	6,8	24,7
4 »	1,45	46,5	31,0	6,1	24,9
4 30	1,35	48, »	32,0	5,5	26,5
5 »	1,35	45,5	30,4	5,0	25,4
5 30	1,40	47,7	31,8	5,2	26,6
6 »	1,40	49,5	33,0	5,1	27,9
( <sup>1</sup> ) 6 30	1,40	47,3	31,6	4,8	26,8
( <sup>2</sup> ) 8 »	1,45	45,8	30,6	22,3	8,3
9 »	1,50	46, »	30,7	7, »	23,7
9 30	1,50	47,2	31,5	7,4	24,1
10 »	1,50	46,1	30,8	6,2	26,6
10 30	1,50	45,9	30,6	5,9	24,7
11 »	1,50	45,3	30,2	5,5	24,7
11 30	1,47	48, »	32,0	5,5	26,5
12 »	1,50	47,4	31,6	5,3	26,3
(Arrêt).					

Les nombres fournis par ce tableau méritent que l'on s'y arrête quelques instants. Ils montrent que, d'une façon générale, l'hydrogène est recueilli en quantité d'autant moindre que l'expérience se prolonge. Toutefois, la perte semble tendre assez rapidement vers un état tel qu'il y a équilibre entre les deux réactions inverses qui se produisent

(<sup>1</sup>) Interruption de l'expérience.(<sup>2</sup>) Nouvelle mise en marche.

Comme l'on pouvait craindre que ces déficits considérables fussent amenés par une mauvaise fermeture de l'appareil, nous avons profité de l'interruption de l'expérience pour examiner la construction du voltamètre; mais les nombres suivants étant presque identiques aux précédents, on ne peut nier l'existence d'une réaction de réduction. Le nombre trouvé au moment où l'on recommence l'électrolyse, est supérieur aux autres, car, à ce moment-là, le liquide est presque immobile et la monobromacétone formée a pu se séparer de l'électrolyte.

Enfin, lorsqu'on distille le produit brut en présence d'eau, on constate au début la présence d'une certaine quantité d'acétone libre; ensuite se condense un liquide lourd qui n'est autre que de la monobromacétone, mais on n'en recueille que quelques centimètres cubes.

Cet ensemble de faits montre d'une façon surabondante que, dans la préparation électrolytique de la monobromacétone, on *doit* éviter l'action de l'hydrogène naissant, et pour cela, il faut toujours opérer en séparant l'anode de la cathode au moyen d'une cloison poreuse.

### C. — Electrolyse de l'acide iodhydrique en présence de l'Acétone ordinaire.

L'étude que nous venons de faire de la préparation par voie électrolytique des dérivés monochloré et monobromé de l'acétone, nous a montré combien facilement le chlore et le brome se substituent à l'hydrogène de l'acétone, et cela même à froid.

On sait d'autre part que l'iode, à la température ordinaire, est à peu près sans action sur l'acétone. Si, en effet, on met ces deux corps en présence, il se produit une simple dissolution d'iode dans l'acétone. Cette dissolution jouit de propriétés telles qu'elle a pu être proposée dans certains cas pour remplacer la solution alcoolique d'iode. Néanmoins, comme elle s'altère plus rapidement que cette dernière, on a presque complètement renoncé à l'utiliser. Deux solutions d'iode, l'une dans l'alcool, l'autre dans l'acétone, ayant été préparées en même temps, dans les mêmes conditions, on a pu conserver la première sensiblement identique à elle-même pendant un mois, alors que la solution acétonique se modifiait profondément; et, tandis qu'il était facile de doser l'iode libre dans la première, ce même dosage était presque impossible dans la seconde.

Si, au lieu d'opérer à froid, on essaie de faire réagir à une température plus ou moins élevée l'iode sur l'acétone, on obtient dans ce cas des dérivés de substitution de l'iode ; mais la réaction est longue, difficile ; et les rendements sont toujours très faibles.

MM. P. de Clermont et P. Chautard<sup>(1)</sup>, qui ont étudié cette réaction, font remarquer que si l'on porte à l'ébullition pendant quelques heures une solution en proportions convenables d'iode dans l'acétone, il se forme bien de l'acétone monoiodée, mais que l'acide iodhydrique qui prend naissance en même temps, détruit presque totalement l'acétone monoiodée déjà formée. Il en résulte que, finalement, on n'obtient qu'une matière résineuse noire provenant de la décomposition de l'acétone iodée par l'acide iodhydrique, et une petite quantité d'iode, acétone qui retient de l'iode en dissolution et qu'il est impossible de purifier.

C'est afin d'éviter cette action réductrice de l'acide iodhydrique que ces savants ajoutent au mélange de l'acide iodique en assez grande quantité<sup>(2)</sup>. Les rendements en acétone monoiodée sont alors très satisfaisants.

Cela étant, nous devons rechercher si la méthode électrolytique pouvait être appliquée à la préparation de la monoiodacétone.

Remarquons d'abord que cette électrolyse de l'acide iodhydrique en présence de l'acétone a déjà été tentée par M. Riche. Ce savant écrit en effet, dans la note déjà citée : *L'acétone est attaquée dans les mêmes conditions par l'acide iodhydrique ; de l'iode se dissout dans l'acétone à laquelle il communique une teinte noire, et une huile très chargée d'iode se dépose au fond du vase. Je n'ai pu arriver à en chasser l'excès d'iode, cependant j'ai isolé après de nombreux lavages quelques aiguilles incolores contenant de l'iode et de la matière organique ; mais elles étaient en trop petite quantité pour qu'il m'ait été possible de les analyser. Je pense cependant qu'il se produit un corps iodé analogue aux corps chlorés et bromés précédents, car la liqueur attaque fortement les yeux et les narines.*

Guidé par les travaux que nous venons de résumer, nous avons pu opérer de suite dans les meilleures conditions possible. La prépara-

(<sup>1</sup>) P. DE CLERMONT et P. CHAUTARD, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. C, p. 885.

(<sup>2</sup>) MM. DE CLERMONT et CHAUTARD donnent les proportions suivantes pour les corps réagissants : acétone pure, 200 gr. ; — iode, 100 gr. ; — acide iodique, 40 gr.

tion de la monoiodacétone par voie électrolytique doit être conduite de la façon suivante : Il faut d'abord éviter toute action réductrice, et pour cela, séparer l'anode de la cathode par une cloison poreuse. En second lieu, la température doit être supérieure à 50° environ; il suffit de maintenir le voltamètre dans un bain-marie à une température constante. Enfin, pour éviter qu'un excès d'iode ne vienne empêcher de purifier le produit obtenu, nous opérons avec des courants de faible intensité ne dépassant pas 0<sup>amp.</sup> 4.

Malgré ces précautions, on trouve à l'anode un corps liquide noir, très foncé, et agissant de façon très désagréable sur les muqueuses des yeux et du nez. Après de nombreux tâtonnements, nous avons pu parvenir à *purifier complètement* le produit formé en l'agitant après l'avoir décanté et lavé, avec une solution de cyanure de potassium. L'iode libre réagit peu à peu sur le cyanure et il reste finalement quelques centimètres cubes d'un liquide presque incolore, légèrement ambré, qui présente tous les caractères de la monochloracétone.

Si, en effet, on dessèche ce corps sur le chlorure de calcium fondu et si on le soumet ensuite à l'analyse, on trouve :

Poids de matière. . . . .	1 gr. 1177	0 gr. 8630
Iodure d'argent. . . . .	1 gr. 4267	1 gr. 1000
D'où, en centièmes I%. . . . .	69 gr. 27	68 gr. 87

Le nombre théorique calculé pour la formule C<sup>3</sup>H<sup>5</sup>IO est :

$$I \% (\text{théor.}) . . . . 69,02$$

Sa densité à l'état liquide est égale à 2,1.

Il ne nous a pas été possible de déterminer son point d'ébullition ni sa densité de vapeur, la chaleur décomposant ce dérivé iodé. Néanmoins, nous pouvons affirmer que nous avons ainsi préparé la monoiodacétone : CH<sup>3</sup>-CO-CH<sup>3</sup>I.

Dans le cours de nos essais de purification de la monoiodacétone, il s'est produit un phénomène intéressant lorsque nous avons cherché à débarrasser la monoiodacétone de l'iode libre au moyen d'une solution concentrée d'hyposulfite de sodium. La décoloration s'est produite comme avec le cyanure de potassium; mais, à un moment donné, la masse liquide s'est brusquement solidifiée. Ayant repris ce corps



solide, l'ayant dissous dans l'éther, nous avons obtenu par l'évaporation du dissolvant, des cristaux en forme d'aiguilles incolores qui, examinées au microscope polarisant, ont donné lieu à des phénomènes de polarisation chromatique.

Un dosage d'iode dans ces cristaux nous a montré que ce corps était un dérivé diiodé de l'acétone.

Poids de matière. . . . .	0 <sup>gr</sup> 5238
Iodure d'argent. . . . .	0, 7948
D'où en centièmes I % . . . . .	82, 12

Le nombre théorique calculé pour  $C^3H^4I^2O$  est :

I % (théor.) . . . . .	81, 93
------------------------	--------

Ce fait est à rapprocher d'une remarque presque identique formulée par MM. de Clermont et Chautard.

Si l'on traite, disent ces savants, la monoiodacétone par les acides sulfurique, azotique, chlorhydrique ou bromhydrique, il y a d'abord dissolution, puis on voit se former un précipité cristallin de diiodacétone symétrique.

Ces divers résultats nous autorisent à penser que la monoiodacétone que nous avons obtenue, s'est transformée elle aussi en diiodacétone symétrique :  $CH^3I-CO-CH^3I$ .

Ajoutons, enfin qu'il est vraisemblable d'admettre que les cristaux incolores que M. Riché n'a pu analyser, mais qui contenaient *de l'iode et de la matière organique*, étaient eux aussi de l'acétone diiodée.

Nous venons de voir que, par électrolyse, on pouvait préparer la monoiodacétone. Malheureusement les rendements ont toujours été faibles. Si l'on veut avoir une certaine quantité de ce dérivé monoiodé, il faut la demander à une réaction particulière que donne la monochloracétone précédemment étudiée.

Si, en effet, on fait réagir la monochloracétone sur l'iodure de potassium, il se forme du chlorure de potassium et de la monoiodacétone.



Un simple lavage à l'eau permet d'éliminer le chlorure de potassium et il reste le dérivé iodé cherché. Cette réaction est générale et peut même être appliquée aux dérivés bromés.

## II. — Électrolyse des Chlorures, Bromures et Iodures Alcalins en présence d'Acétone.

L'électrolyse des chlorures, bromures et iodures alcalins a suscité de très nombreuses recherches, intéressantes aussi bien au point de vue théorique qu'au point de vue industriel (1).

On sait en effet que l'on a proposé d'utiliser cette réaction électrolytique soit pour la préparation du chlore et des alcalis, soit encore pour la préparation des hypochlorites, des chlorates ou des chlorures décolorants.

En entreprenant les expériences actuelles, nous voulions uniquement savoir si l'électrolyse de ces mêmes corps, en présence d'acétone, conduirait à des résultats de même nature que ceux obtenus en électrolysant les acides chlorhydrique, bromhydrique ou iodhydrique. Il y avait surtout à voir quel serait le rôle de l'alcali qui prend naissance dans la réaction. Il suffit, en effet, de se rappeler que les hypochlorites, hypobromites et hypoiodites alcalins en présence d'acétone donnent naissance au chloroforme, au bromoforme et à l'iodoforme. Devait-on trouver ici des modes de préparation de ces dérivés chlorés, bromés ou iodés; ou bien aurait-on les mêmes résultats que ceux fournis par les acides en présence d'acétone?

La question mérite d'autant plus que nous nous y arrêtions, qu'elle a été le germe du présent travail. C'est, en effet, en étudiant les travaux d'Elbs sur la préparation électrolytique de l'iodoforme au moyen de l'alcool et de l'acétone, que nous est venue l'idée d'étudier ces réactions.

Ajoutons enfin que, si les résultats obtenus dans la préparation du chloroforme et du bromoforme ne sont pas aussi satisfaisants que nous l'aurions voulu, nous avons en revanche pu obtenir l'iodoforme à l'état de très grande pureté et avec de bons rendements.

**ÉLECTROLYSE DU CHLORURE DE POTASSIUM.** — L'électrolyse du chlorure de potassium en présence d'acétone donne des résultats sensiblement différents suivant les conditions de l'expérience.

(1) Voir un résumé de ces travaux dans les ouvrages suivants :

LUNGE, *Fabrication électrolytique de la soude et du chlore, des liqueurs de blanchiment et des chlorates.*

A. MINET, *Traité théorique et pratique d'électrochimie.*

Si l'on emploie un vase poreux séparant l'anode de la cathode et si l'on fait passer le courant électrique dans une *solution neutre* de chlorure de potassium, on constate à l'anode la formation d'un corps liquide qui se rassemble à la partie inférieure du récipient. Ce liquide n'est autre que la monochloracétone obtenue en liqueur acide. Le rendement est toujours ici inférieur à celui que nous a donné l'électrolyse de l'acide chlorhydrique. Cette diminution de rendement est facile à concevoir ; en effet, lorsque à l'anode se dégage une molécule de chlore, une molécule de potasse se forme à la cathode. Le chlore de l'anode, se trouvant en présence d'acétone, peut se substituer à un atome d'hydrogène et donner naissance à la monochloracétone observée. Pendant ce temps, le liquide cathodique devient de plus en plus riche en potasse, et une partie de cet alcali tend à venir réagir à travers la cloison poreuse sur le liquide acide qui entoure l'anode. De plus, la monochloracétone formée est décomposée plus ou moins complètement par la potasse. Il en résulte que l'on n'a aucun intérêt à remplacer l'acide chlorhydrique par le chlorure de potassium dans la préparation de la monochloracétone.

L'électrolyse du chlorure de sodium fournit des résultats analogues.

Si, au lieu d'opérer en liqueur neutre, on effectue l'électrolyse du chlorure de potassium en liqueur *faiblement alcaline* et à une température peu élevée, c'est-à-dire si les conditions de l'expérience sont celles qui donnent *les meilleurs résultats dans la préparation de l'hypochlorite de potassium*, on obtient, en ajoutant à la liqueur anodique de l'acétone ordinaire, un liquide qui, par son odeur, rappelle le chloroforme. Malheureusement nous n'en avons jamais obtenu que de très petites quantités et nous n'avons pu en faire l'analyse.

L'électrolyse du chlorure de potassium sans vase poreux ne nous a donné que de très mauvais résultats ; aussi ne nous y arrêtons-nous pas.

**ÉLECTROLYSE DU BROMURE DE POTASSIUM.** — L'électrolyse du bromure de potassium nous a peu retenu, car, pendant que nous faisons nos recherches précédentes, un chimiste américain, M. P. Coughlin<sup>(1)</sup>, publiait les résultats qu'il venait d'obtenir en essayant de préparer électrolytiquement le bromoforme. Chose curieuse à noter,

(<sup>1</sup>) P. COUGHLIN, *American chem. Journal*, t. XXVII, p. 63 ; 1902.

le point de départ de ce chimiste est le même que celui qui nous a amené à entreprendre le présent travail.

Nous nous contenterons simplement ici de faire remarquer que les conditions expérimentales dans lesquelles s'est placé M. Coughlin sont celles qui permettent de préparer facilement les hypobromites. Cette remarque est à retenir, car elle nous fournira plus loin un argument lorsque nous voudrons interpréter la formation de l'iodoforme aux dépens de l'acétone.

ELECTROLYSE DE L'IODURE DE POTASSIUM. — On sait que si l'on électrolyse une solution d'iodure de potassium en liqueur plus ou moins alcaline en présence d'alcool ordinaire, il se forme très facilement d'assez grandes quantités d'iodoforme, et l'on admet avec MM. Elbs et Herz<sup>(1)</sup>, qui ont fait une étude systématique de la réaction, que l'on en peut représenter le terme final par l'équation suivante :



Ces deux savants chimistes, après avoir étudié les meilleures conditions de rendement de cette réaction, essayèrent d'obtenir des résultats de même ordre avec l'acétone. On sait, en effet, avec quelle facilité on peut déceler des traces d'acétone, en traitant ce corps en liqueur alcaline par de l'iode : il se forme presque instantanément des cristaux d'iodoforme. Malgré cela, les résultats fournis par voie électrolytique furent mauvais : l'iodoforme obtenu par MM. Elbs et Herz était impur. Les conclusions de ces deux savants sont d'ailleurs les suivantes :

*Les résultats sont beaucoup moins satisfaisants si l'alcool est remplacé par l'acétone; dans aucun cas, l'expérience n'a donné d'iodoforme pur. Ce corps était toujours mélangé avec de l'iode ou des dérivés iodés de l'acétone.*

Nombreuses ont été, depuis cette époque, les tentatives faites pour obtenir l'iodoforme pur; mais nombreux aussi ont été les échecs.

MM. Fœrster et Meves<sup>(2)</sup> qui, après MM. Elbs et Herz, ont étudié la préparation électrolytique de l'iodoforme, reconnaissent aussi que toutes leurs tentatives pour remplacer l'alcool par l'acétone ont été infructueuses. La plupart du temps, l'iodoforme était mélangé d'iode et de produits iodés de l'acétone. La substance solide obtenue était en petite

(<sup>1</sup>) ELBS et HERZ, *Zeitschrift für Elektrochemie*. t. IV, p. 113; 1897-98.

(<sup>2</sup>) FÖRSTER et MEVES, *Zeitschrift für Elektrochemie*, t. IV, p. 268 et 418; 1897-98.

partie de l'iodoforme et pour la plus grande part, un corps rouge brun pulvérulent. Ordinairement il se déposait à l'anode, après un plus long repos, une huile rouge brun sombre qui se transformait peu à peu en une poudre rouge identique à celle qui se formait pendant l'électrolyse.

On voit ainsi, par ces résultats, que l'on n'avait pu réussir à préparer électrolytiquement l'iodoforme pur au moyen de l'acétone. C'est alors que nous nous sommes proposé d'étudier à notre tour cette question et de voir pour quels motifs on ne parvenait ici à avoir de bons résultats.

Nos premières expériences ne furent pas plus heureuses que celles de nos devanciers. Elles nous montrèrent que l'iodoforme prenait naissance dès que l'on opérait en liqueur alcaline; mais en même temps le liquide électrolytique se colorait et l'iodoforme précipité était mélangé avec des produits bruns qu'il était très difficile de séparer. Le passage d'un courant de gaz carbonique ou l'emploi de carbonate de potassium ne nous ont pas donné de meilleurs résultats, et cela, que l'on opérât ou non avec un vase poreux séparant l'anode de la cathode.

Pour éviter la présence de ces produits bruns dont nous n'avons pu arriver à connaître la nature exacte, mais qui contiennent vraisemblablement de l'iode, nous avons alors imaginé de n'employer que des courants de très faible intensité, ne dépassant pas 0<sup>amp.</sup> 4. Dans ces conditions, il était à penser que l'iode ne serait pas en excès dans le liquide et ne donnerait pas naissance à des produits iodés dérivés de l'acétone, analogues à ceux que nous avons obtenus en liqueur acide. L'expérience s'est trouvée confirmer nos prévisions, et, au mois de février 1902, nous pouvions annoncer à l'une des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux (1), que nous avions enfin obtenu de l'iodoforme pur, la liqueur électrolytique restant presque incolore.

Non content de ce premier résultat, nous avons alors songé à améliorer les rendements. Il fallait pour cela ou bien augmenter l'intensité du courant, ou bien faire varier la composition de l'électrolyte, et nous avons eu à essayer bien des échecs. Enfin une nouvelle modification au dispositif expérimental employé nous a permis de lever ces dernières difficultés.

(1) A. RICHARD, *Extrait des procès-verbaux de la Société des Sc. phys. et nat. de Bordeaux*, 20 février 1902.

Cette modification consiste à n'introduire l'acétone que par petites quantités dans le liquide électrolytique, et cela, en proportions variables avec l'intensité du courant. Dans ces conditions, en effet, l'acétone est transformée en iodoforme presque aussitôt après son arrivée dans l'électrolyte, il ne peut plus y avoir formation de dérivés iodés de l'acétone; la potasse en excès ne peut plus réagir sur ces divers produits, et l'iodoforme se dépose à l'état de très grande pureté, avec de bons rendements.

Remarquons en outre que l'idée de n'introduire l'acétone qu'au fur et à mesure des besoins nous a été suggérée par le fait suivant sur lequel nous aurons à revenir par la suite.

Pendant que nous poursuivions ces recherches, nous étudions parallèlement les acétones homologues supérieures de l'acétone ordinaire. Or, ces différentes substances qui se dissolvent facilement dans les acides étendus sont très peu solubles dans l'eau pure et surtout dans l'eau ayant dissous des chlorures, bromures ou iodures alcalins. Aussi, pour éviter d'avoir des pertes trop grandes de ces diverses acétones, nous ne les introduisons que d'une façon progressive dans l'électrolyte. L'application de ce procédé à l'acétone ordinaire nous a donné de très bons résultats.

Ainsi, pour n'en citer qu'un exemple, avec une solution contenant 5 grammes d'iodure de potassium pour 100 grammes d'eau, nous avons obtenu, après cinq heures d'électrolyse avec un courant de 0<sup>amp</sup>.16 à 37°, un poids d'iodoforme pur de 1<sup>gr</sup>0867 alors que le poids théorique est de 1<sup>gr</sup>9616. Le rendement est, dans ce cas, de 55,36 % par rapport au courant employé. On peut d'ailleurs l'augmenter encore en neutralisant la liqueur par un courant de gaz carbonique.

Ces résultats démontrent bien que c'est surtout à l'introduction lente et progressive de l'acétone que l'on doit d'avoir pu préparer électrolytiquement l'iodoforme pur.

Nous en avons d'ailleurs eu une nouvelle preuve dans ce fait qu'un chimiste américain, M. H. Abott<sup>(1)</sup>, est parvenu aux mêmes résultats que nous, en n'introduisant l'acétone dans le voltamètre que par petites fractions. Ce chimiste, pour éviter les produits bruns qui souillent en général l'iodoforme, a songé à opérer à des températures assez élevées (75°, p. ex.) et avec des courants atteignant 2 ampères. Malgré

(1) HOWE ABBOTT, *Journal of Physical Chemistry*, février 1904.

ces conditions très différentes des nôtres, il a obtenu de l'iodoforme pur, mais il n'a pu y parvenir que grâce à l'introduction progressive de l'acétone. Les rendements de ses expériences sont à peine inférieurs aux nôtres. M. Abott indique, entre autres nombres, qu'il a eu un rendement de 51,2 % en opérant à 75° avec un courant de 2<sup>amp</sup>.7 pendant une heure cinquante minutes.

Si la préparation de l'iodoforme pur, par voie électrolytique, était un problème intéressant à résoudre, une seconde question se posait en même temps : quelle est la véritable formule de la réaction et comment peut-on interpréter cette formation d'iodoforme ?

En ce qui concerne la formule de la réaction, on a admis jusqu'ici, plutôt qu'on ne l'a démontré, que la formation d'iodoforme est accompagnée d'une production d'acide acétique, et que l'on peut écrire :



Pour mettre l'acide acétique en évidence, certains auteurs essaient d'obtenir la formation d'éther éthylacétique. Mais l'odeur de ce corps est presque toujours accompagnée d'autres odeurs qui la masquent plus ou moins complètement.

La formation de cacodyle, qu'utilise M. Abott, est certainement meilleure ; mais elle présente l'inconvénient de ne pas être générale et de ne pas s'appliquer aux autres acétones.

Nous nous sommes adressé, pour résoudre le problème posé, à la méthode qu'indique M. Duclaux pour le dosage des acides volatils. Il y avait cependant quelques précautions à prendre à cause de l'acide iodhydrique existant dans la liqueur, sans préjudice d'autres acides oxygénés de l'iode pouvant s'y trouver en même temps.

Voici la suite des traitements que nous avons fait subir au liquide résiduel après élimination de l'iodoforme :

On ajoute d'abord du sulfate de cuivre destiné à précipiter la majeure partie de l'iode à l'état d'iodure cuivreux, une autre partie étant mise en liberté. Le liquide filtré est agité avec un excès de sulfure de carbone, qui dissout l'iode libre, tout en étant sans action sur les autres corps. Après décantation du sulfure de carbone, on ajoute environ 5 centimètres cubes d'acide sulfurique pur et on soumet le tout à une première distillation. Un peu d'iode qui a pu rester, colore le liquide distillé ; mais une nouvelle addition de sulfure de carbone dissout ce résidu, et le liquide incolore qui surnage, étendu de façon

à occuper 110 centimètres cubes, est soumis à une distillation fractionnée en suivant complètement les indications de M. Duclaux.

Voici, dans ces conditions, les nombres trouvés dans une expérience :

Volumes distillés.	Volumes d'eau de chaux.	Volumes %	Nombres théoriques pour l'acide acétique.
10	9,0	7,6	7,4
20	18,3	15,6	15,2
30	28,1	23,9	23,4
40	34,2	32,6	32,0
50	49,1	41,9	40,9
60	60,1	51,3	50,5
70	72,2	61,6	60,6
80	85,1	72,7	71,9
90	99,9	85,3	84,5
100	117,1	100,0	100,0

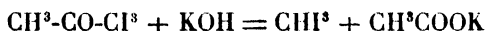
Si l'on porte les nombres de la première colonne en abscisses et ceux de la troisième en ordonnées, on obtient une courbe qui se confond presque complètement avec la courbe théorique correspondant à l'acide acétique, telle que l'a construite M. Duclaux.

La réaction peut donc bien être formulée comme nous l'avons fait.

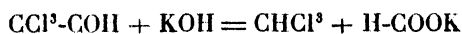
Un dernier point restait à résoudre : comment interpréter la formation de l'iodoforme ?

Deux théories sont en présence :

Les uns, avec M. Richter, admettent la formation d'une acétone triiodée, non isolée d'ailleurs ( $\text{CH}_3\text{-CO-Cl}^3$ ), qui, en présence d'un alcali, la potasse, par exemple, se dédoublerait en iodoforme et en acétate de potassium d'après la formule :



Il se passerait là une réaction en tous points semblable à celle qui a lieu lorsque l'on fait réagir la potasse sur le chloral, ce corps donnant naissance au chloroforme et au formiate de potassium comme le montre la formule :



D'autres enfin, avec M. Donny-Hénault (1), par exemple, admettent

(1) DONNY-HÉNAULT, Ueber die Synthese von organischen Substanzen auf elektrischen Wege (*Zeitschrift für Elektrochemie*, t. VI, p. 534; t. VII, p. 57).



qu'il se forme d'abord de l'acide hypoiodéux, qui, réagissant ensuite sur l'acétone, donnerait naissance à l'iodoforme d'après la formule :



Dans cette réaction, l'iode agirait à l'état d'acide hypoiodéux par son pouvoir oxydant.

De ces deux modes d'interprétation, M. Abott, dans le travail précédemment cité, admet le premier en s'appuyant sur les faits suivants :

Dans l'interprétation de M. Donny-Hénault, l'acide hypoiodéux ou l'hypoiodite qui prend naissance, peut bien transformer l'alcool ou l'acétone en iodoforme, mais il peut aussi se transformer en acide iodique et en iodate, de telle sorte que le rendement de l'électrolyse en iodoforme dépendrait, dans une certaine mesure, de la richesse plus ou moins grande de la liqueur en iodate. De cette remarque, M. Donny-Hénault tire la conclusion suivante : il sera avantageux d'ajouter à la liqueur un iodate si l'on veut accroître ce rendement.

M. Abott a suivi les indications de M. Donny-Hénault, et comme il n'a pas obtenu de rendement meilleur, grâce à l'addition d'iodate, et il en conclut que la théorie de l'intervention de l'acide hypoiodéux ne correspond pas à la réalité des faits, et il incline pour la théorie de M. Richter, c'est-à-dire pour la formation transitoire d'une acétone triiodée.

L'ensemble de nos expériences semble plutôt donner raison à la théorie de M. Donny-Hénault.

La formation d'acétone triiodée qu'il faut admettre, semble en contradiction avec les faits que nous avons observés soit avec l'acétone ordinaire, soit avec les autres acétones étudiées par la suite. Il ne nous a pas été possible d'obtenir d'une façon nette des dérivés halogénés polysubstitués.

En outre, les dérivés monoiodés se formant très difficilement, il faudrait admettre que le dérivé triiodé aurait une plus grande facilité à se former que le dérivé monoiodé, ce qui n'a pas lieu en général.

Si nous ajoutons à cela que l'on forme avec grande facilité le chloroforme, le bromoforme et l'iodoforme par l'action directe des hypochlorites, hypobromites et hypoiodites sur l'alcool et les acétones, et que nous nous sommes toujours placé dans des conditions aussi favorables que possible à la formation d'hypoiodite, nous pensons pouvoir en conclure que l'hypothèse de l'intervention de l'acide hypoiodéux

dans la préparation de l'iodoforme, est bien près d'être parfaitement vérifiée. D'ailleurs, MM. Elbs et Færster<sup>(1)</sup>, qui discutent certaines des assertions de M. Donny-Hénault, considèrent comme *démontrée depuis longtemps cette intervention de l'hypoiodite* puisqu'ils disent qu'il n'y a aucune différence essentielle entre la théorie de M. Hénault et celle qui est appliquée depuis Lieben par tous les chimistes qui savent bien que cette formation d'iodoforme provient de l'hypoiodite et non pas de l'iode libre. (Voir à la fin de ce travail la note B.)

(<sup>1</sup>) ELBS et FÆRSTER, *Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn. O. Donny-Hénault : Über die Synthese von organischen Substanzen auf elektrischem Wege* (Zeitschrift für Elektrochemie, t. VII, p. 341 ; 1900-01).

## CHAPITRE II

### Préparation électrolytique des dérivés halogénés de quelques autres acétones.

Dans les pages précédentes, nous avons exposé les procédés qui nous ont permis de préparer par voie électrolytique un certain nombre de dérivés halogénés de l'acétone ordinaire. Nous allons maintenant, en suivant une marche identique, indiquer les résultats que nous avons obtenus en considérant quelques homologues supérieurs de l'acétone ordinaire, ainsi qu'une dicétone, savoir, l'acétylacétone.

Parmi les acétones homologues supérieures de la diméthylcétone, nous avons étudié :

- 1<sup>o</sup> La *Méthyléthylcétone* ou *Butanone* ( $\text{CH}^3\text{-CO-C}^2\text{H}^5$ ).
- 2<sup>o</sup> La *Méthylpropylcétone* ou *2 Pentanone* ( $\text{CH}^3\text{-CO-C}^2\text{H}^7$ ).
- 3<sup>o</sup> La *Diéthylcétone* ou *3 Pentanone* ( $\text{C}^2\text{H}^5\text{-CO-C}^2\text{H}^5$ ).

Il nous a été possible de nous procurer des quantités suffisantes de ces corps pour faire l'étude que nous avons en vue. Le produit commercial n'était pas chimiquement pur ; mais des distillations fractionnées, et, au besoin, des combinaisons avec le bisulfite de sodium, permettaient d'obtenir ces corps à l'état de très grande pureté.

Nous nous sommes d'ailleurs assuré chaque fois de ce fait par l'analyse élémentaire, ainsi que par la détermination de la température d'ébullition et de la densité de vapeur.

Les expériences que nous avons à développer maintenant étant en tous points semblables à celles qui précèdent, nous ne ferons qu'indiquer les particularités essentielles à chaque série d'expériences et les résultats qu'elles nous ont fournis.

1° Méthyléthylcétone ou Butanone ( $\text{CH}^3\text{-CO-C}^2\text{H}^5$ ).

La Méthyléthylcétone existe en assez grande quantité, ainsi que l'a montré M. Buisine<sup>(1)</sup>, dans les huiles d'acétone provenant du dessuintage des laines. Aussi, c'est en partant de ce produit que nous avons préparé les premières portions de méthyléthylcétone dont nous avons eu besoin. Ajoutons que ces huiles nous avaient été gracieusement données par M. Buisine que nous sommes heureux de remercier ici.

Toutefois, afin d'éviter les manipulations un peu longues que nécessite cette extraction, et profitant de ce que l'on trouve dans le commerce d'assez grandes quantités de méthyléthylcétone, nous avons, par la suite, utilisé le produit commercial convenablement purifié.

Voici, à titre d'exemple, l'analyse de l'un des échantillons utilisés :

	gr
Matière employée . . . . .	0,2462
Gaz carbonique . . . . .	0,6032
Eau . . . . .	0,2565

Soit en centièmes :

	OBSERVÉ	CALCULÉ POUR $\text{C}^4\text{H}^8\text{O}$
C . . .	66,81	66,66
H . . .	11,16	11,11
O . . .	22,03	22,22
	<u>100,00</u>	<u>99,99</u>

La détermination de quelques constantes physiques de ce corps nous a donné les nombres suivants :

1° Densité à l'état liquide, prise à 17° :

$$d = 0,8101$$

2° Densité de vapeur (méthode de Meyer) :

Matière employée . . . . .	0gr0550
Hauteur barométrique corrigée . . . . .	764 <sup>mm</sup> 6

(1) P. et A. BUISINE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXVIII, p. 561 et 885.

Volume de l'air déplacé . . . . . 18°2

Température à laquelle la lecture a été faite 19°4

D'où  $D = 2,57$

La densité théorique est :  $D_{th} = 2,49$

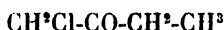
3° La température d'ébullition a été 79°4 sous une pression de 768<sup>mm</sup>5. M. Van Reyenant donne comme point d'ébullition 78-79° sous la pression atmosphérique ordinaire.

### A. Électrolyse de l'Acide Chlorhydrique.

L'électrolyse de l'acide chlorhydrique en présence de méthyléthylcétone, offre un double intérêt.

Il faut tout d'abord rechercher si les résultats obtenus avec l'acétone ordinaire sont encore vrais pour la nouvelle acétone étudiée; mais à côté de cette étude, il en existe une autre tenant tout particulièrement à la constitution de ce nouveau corps.

En effet, dans le cas de la diméthylcétone ordinaire, la symétrie de la molécule ne permet de prévoir qu'un seul dérivé monochloré; ici au contraire, il est possible d'admettre la formation des trois dérivés monosubstitués suivants



De ces trois corps les deux premiers seuls sont connus. Ils ont été obtenus tout récemment par M. L. Van Reyenant<sup>(1)</sup> dans l'action directe du chlorure de sulfuryle sur la méthyléthylcétone refroidie.

Ajoutons que le second de ces corps avait été préparé par Vladesco<sup>(2)</sup> par la chloruration directe de cette même acétone.

En revanche, aucune électrolyse en présence de cette acétone n'a été tentée avant l'étude dont nous donnons ici les principaux résultats.

Le liquide électrolytique sur lequel nous avons opéré, a été soit un mélange en proportions convenables d'acide chlorhydrique concentré et pur et de méthyléthylcétone, soit un mélange formé avec de

(<sup>1</sup>) L. VAN REYENANT, *Sur l'acétone méthyléthylrique* (Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas et de la Belgique, t. XX, p. 27).

(<sup>2</sup>) VLADESCO, *Bull. de la Soc. Chim. de Paris*, 3<sup>e</sup> sér., t. VI, p. 365; 1891.

l'acide étendu. Il ne faut pas cependant ajouter une trop grande quantité d'eau, car cette acétone est insoluble dans l'eau pure et ne se dissout bien que grâce à une quantité suffisante d'acide chlorhydrique.

Si l'on soumet un tel liquide à l'action du courant électrique, on constate au bout d'un certain temps la formation de deux couches distinctes exactement comme dans les cas précédemment étudiés. Il s'est formé un dérivé chloré de la méthyléthylcétone ou plutôt un mélange de dérivés chlorés que nous avons cherché à isoler et à purifier.

Nous avons, dans ce but, préparé une certaine quantité du produit brut et, après l'avoir fait distiller en présence d'eau, sous pression réduite, nous l'avons desséché, puis soumis à des distillations fractionnées sous la pression atmosphérique.

Il nous a alors été possible de voir que la majeure partie du liquide distille entre 116 et 117°. Puis, la température s'élève et marque un temps d'arrêt vers 124-125°. Si l'on prolonge l'action de la chaleur, la masse a tendance à noircir, il y a décomposition du résidu; l'expérience doit être arrêtée.

Les deux corps ainsi obtenus peuvent être identifiés avec les deux dérivés obtenus par M. Van Reymanent. Ils ont d'abord les mêmes points d'ébullition. En outre, ce sont tous les deux des dérivés monochlorés comme le montrent les deux dosages suivants :

I. Matière employée . . . . .	gr 0,3656
Chlorure d'argent . . . . .	0,4900
II. Matière employée . . . . .	0,4408
Chlorure d'argent . . . . .	0,5918

D'où, en centièmes :

	OBSERVÉ		CALCULÉ POUR
	I	II	C <sup>4</sup> H <sup>7</sup> ClO
Cl %	33,14	33,19	33,33

La détermination de la densité de vapeur du premier nous a donné :

Matière employée . . . . .	0gr0728
Hauteur barométrique corrigée . . . . .	760 <sup>mm</sup> 6

Volume de l'air déplacé. . . . . 17<sup>cc</sup>4  
 Température à laquelle la lecture a été faite. 23°  
 D'où  $D = 3,60$ .  
 La densité théorique est  $D_{th} = 3,68$ .

Le premier de ces deux corps était donc bien le dérivé monochloré secondaire découvert par Vladesco et auquel il attribue la formule :  $CH^3-CO-CH-CH^3$  (*Méthyléthylcétone  $\alpha$ -chlorée* ou 3 Chlore 2 Butanone).

Le second est le dérivé monochloré primaire découvert par M. Van Reymenant et auquel il attribue la formule :  $CH^3-CO-CH^3-CH^3$  (*1 Chlore 2 Butanone*).

Les électrolyses qui nous ont donné les produits précédents ont été faites avec des courants dont l'intensité moyenne a varié de 0<sup>amp</sup>. 75 jusqu'à 3<sup>amp</sup>. 45, la densité à l'anode étant toujours très faible.

Un point important à résoudre ici comme dans le cas de l'acétone ordinaire, c'était l'influence de l'hydrogène naissant. Nous avons pour cela institué deux séries d'expériences exactement disposées comme avec l'acétone ordinaire.

Dans la première série, deux électrolyses, placées sur le même courant, étaient en tous points identiques sauf dans ce fait que dans la première une cloison poreuse séparait l'anode de la cathode et dans l'autre n'existait aucune séparation. Elles nous ont donné des résultats très peu différents comme l'indiquent les nombres du tableau suivant :

Intensité.	Poids du corps obtenu		Différence.
	avec cloison poreuse.	sans cloison poreuse.	
amp.	gr.	gr.	gr.
0,9	30,192	28,404	1,788
1,2	30,862	29,105	1,757
2,9	27,930	26,487	1,443

Bien que les poids de substance indiqués ici soient les poids des produits chlorés bruts, ils semblent montrer une légère différence en faveur de l'intervention de la cloison poreuse. Mais ils ne permettent pas de dire si l'hydrogène a réduit ou non les dérivés formés, la différence observée pouvant tenir à d'autres causes.

La méthode d'Oettel montre d'ailleurs que, comme dans le cas de la monochloracétone ordinaire, l'hydrogène naissant a, dans les conditions de l'expérience, une action chimique sensiblement nulle sur le dérivé chloré formé.

## . Préparation de la Méthyléthylcétone monochlorée

<i>Composition de l'électrolyte.</i>	Méthyléthylcétone . .	40 <sup>cc</sup>
	Acide chlorhydrique .	50 <sup>cc</sup>
	Eau . . . . .	30 <sup>cc</sup>

Durée de l'électrolyse : 13 heures. — Température moyenne : 16°

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz tonnant.	Hydrogène (th.)	Hydrogène (obs.)	Perte.
—	—	—	—	—	—
	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
11 45	0,82	38,9	26,0	26,0	0,0
1 15	0,86	38,3	25,6	25,4	0,2
4 45	0,86	39,2	26,2	26,6	— 0,4
2 15	0,85	39,7	26,5	26,5	0,0
2 45	0,85	38,9	26,0	25,9	0,1
3 15	0,85	39,8	26,6	26,6	0,0
3 45	0,84	40,5	27,0	27,0	0,0
"	"	"	"	"	"
6 15	0,85	43,6	29,1	29,1	0,0
( <sup>1</sup> ) 6 45	0,90	42,5	28,4	28,2	0,2
( <sup>2</sup> ) 7 30	0,85	"	"	"	"
7 45	0,85	41,3	27,6	27,4	0,2
8 15	0,90	41,5	27,7	27,6	0,1
8 45	0,85	43,6	29,1	29,0	0,1
9 15	0,86	41,5	27,7	27,5	0,2
9 45	0,85	42,1	28,1	27,9	0,2
10 15	0,85	43,8	29,2	29,0	0,2
12 15	0,89	45,2	30,2	28,9	1,3
12 45	0,85	41,2	27,5	26,7	0,8
1 15	0,85	42,7	28,5	27,2	1,3
(arrêt).					

Le produit brut pesait 23<sup>gr</sup>638.

Les gaz ont été mesurés à 15° sous la pression atmosphérique. A part les trois derniers nombres qui semblent indiquer une légère réduction, on voit que l'hydrogène est sans action chimique sensible sur les produits de la réaction dans les conditions de l'expérience.

Le tableau suivant conduit d'ailleurs aux mêmes conclusions, bien que l'intensité du courant soit le double de ce qu'elle est dans la réaction précédente.

(<sup>1</sup>) Interruption de l'expérience.

(<sup>2</sup>) Nouvelle mise en marche.



## II. Préparation de la Méthyléthylcétone monochlorée.

Méthyléthylcétone. . 40<sup>cc</sup>.  
*Composition de l'électrolyte.* Acide chlorhydrique. 50<sup>cc</sup>.  
 Eau . . . . . 40<sup>cc</sup>.

Durée de l'électrolyse : 10 heures. — Température moyenne : 19°.

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz tonnant.	Hydrogène. (th.)	Hydrogène. (obs.)	Perte.
	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
8 30	1,90	44,7	29,8	29,1	0,7
9 »	1,90	45,9	30,6	30,3	0,3
9 30	1,90	45,9	30,6	30,3	0,3
10 »	1,90	46,4	31,0	30,6	0,4
» »	» »	» »	» »	» »	» »
1 30	1,90	45,6	30,4	30,0	0,4
2 »	1,85	44,9	30,0	29,1	0,9
2 30	1 85	44,7	29,8	29,1	0,7
3 »	1,80	45,5	30,4	30,0	0,4
3 30	1,80	48,4	32,3	32,0	0,3
4 »	1,80	47,7	31,8	31,5	0,3
4 30	1,80	46,0	30,7	30,6	0,1
5 »	1,70	47,0	31,4	31,2	0,2
5 30	1,64	46,2	30,8	31,0	— 0,2
6 »	1,60	48,0	32,0	32,0	0,0
6 15	1,65	50,0	33,4	33,1	0,3
Arrêt.					

Le poids du produit brut obtenu ici a été de 25<sup>g</sup>648.

### B. — Electrolyse de l'Acide Bromhydrique.

L'électrolyse de l'acide bromhydrique en présence de la méthyléthylcétone nous a donné des résultats de même nature que les précédents.

Cette acétone se mélangeant facilement à l'acide bromhydrique concentré ou même légèrement étendu, nous avons pu soumettre un tel mélange homogène à l'action du courant électrique. Peu de temps après le commencement de l'électrolyse, on voit se former sur l'anode de petites gouttelettes rougeâtres qui d'abord se dissolvent dans l'électrolyte, mais qui finissent par se rassembler au fond du vase, formant une couche plus ou moins épaisse.

Le produit brut ainsi obtenu est étendu d'eau et distillé sous pression réduite. On recueille un liquide incolore, agissant très vivement sur les yeux, que l'on dessèche en le laissant séjourner quelque temps au contact du chlorure de calcium pur et sec.

Afin de voir si nous avons préparé un composé unique ou un mélange de dérivés bromés, et désirant d'autre part éviter de trop grandes pertes de ces produits sous l'action de la chaleur, nous les avons distillés en présence d'eau sous des pressions différentes, mais inférieures à la pression atmosphérique.

Si nous admettons, par analogie avec ce qui s'est produit pour la méthyléthylcétone chlorée, qu'il n'y a eu formation que de dérivés monosubstitués par le brome, il peut se présenter deux cas : ou bien il ne s'est formé qu'une seule acétone monobromée et le système fourni par la vapeur mixte et le liquide est un système univariant qui doit avoir un point fixe d'ébullition sous la pression donnée (c'est le cas trouvé pour la monochloracétone ordinaire, et pour la monobromacétone); ou bien on a affaire à un mélange de deux acétones monobromées et le système devient alors un système bivariant n'ayant plus un point fixe d'ébullition sous une pression donnée, mais manifestant au contraire une élévation continue de la température jusqu'au moment où le système devient univariant, si toutefois il peut atteindre un tel état.

C'est ce second cas que nous a fourni l'expérience.

En effet, chaque fois que nous avons essayé de distiller sous pression réduite, en présence d'un excès d'eau, le dérivé bromé obtenu, nous avons toujours constaté la même suite de phénomènes. Le thermomètre accuse une brusque élévation de température au moment où l'ébullition commence; puis, après avoir indiqué un point d'arrêt, il suit une marche ascendante très lente, mais très nette, jusqu'en un second point où il reste quelques instants. Aussitôt après, on constate une brusque élévation de température de plusieurs degrés, et le thermomètre prend une position stable qu'il conserve jusqu'à la fin de l'expérience.

Il est facile de voir que ces variations dans la marche du thermomètre ont coïncidé avec des modifications dans la composition du système.

Si nous admettons que, au début de l'expérience, nous avons affaire à deux dérivés monobromés mélangés, en présence d'eau et de vapeur

mixte, nous avons un système bivant (trois composants indépendants et trois phases), et nous ne devons pas avoir de point fixe d'ébullition. Mais, à mesure que l'expérience progresse, le liquide qui distille d'abord est très riche en dérivé le plus volatil, tandis que, à la fin, le liquide le moins volatil reste presque seul en présence d'eau. De là le léger arrêt du thermomètre que nous avons constaté. Lorsque, enfin, on observe la brusque élévation de température qui suit, on peut voir que dans le ballon il ne reste plus qu'un liquide homogène, de l'eau, dont le point d'ébullition, sous la pression donnée, concorde très exactement avec les nombres lus.

Voici, à titre d'exemple, les nombres observés dans trois distillations faites avec le même liquide, sous trois pressions différentes :

I. Pression 313<sup>mm</sup>.

Ascension brusque du thermomètre de. . . . .	14° à 67°
Elévation très lente . . . . .	67° à 71°5
Elévation brusque. . . . .	72° à 76°
Tension maximum de la vapeur d'eau à 76° (Regnault). . . . .	301 <sup>mm</sup>

II. Pression 438<sup>mm</sup>.

Ascension brusque du thermomètre de. . . . .	14° à 76°
Elévation très lente . . . . .	76° à 80°
Elévation brusque. . . . .	80° à 85°
Tension maximum de la vapeur d'eau à 85° (Regnault). . . . .	432 <sup>mm</sup>

III. Pression 750<sup>mm</sup>.

Ascension brusque du thermomètre de. . . . .	14° à 89°
Elévation très lente . . . . .	89° à 95°
Elévation brusque. . . . .	95° à 99°
Tension maximum de la vapeur d'eau à 99°6 (Regnault). . . . .	749 <sup>mm</sup> 2

Dans ces différentes distillations, le liquide et le ballon restent incolores; il n'y a pas trace de décomposition.

Ces faits nous permettent de déduire qu'il s'est formé deux dérivés bromés de la méthyléthylcétone, dont les points d'ébullition, en présence d'eau, sous la pression d'une demi-atmosphère différent d'environ 5°, et sous la pression atmosphérique, d'environ 6°. La distillation de ces corps, sous la pression atmosphérique et sans eau, permet de leur attribuer des points d'ébullition voisins de 136° degrés pour le premier,

et 146° pour le second. La différence entre ces températures est de 10°.

Ces résultats concordent de tous points avec ceux obtenus par M. Reymenant.

Nous avons donc ainsi préparé électrolytiquement les deux dérivés monobromés de la méthyléthylcétone étudiés par ce chimiste et auxquels il attribue les deux formules :  $\text{CH}^3\text{-CO-CHBr-CH}^3$  pour le premier (3 Brome-2 Butanone), et  $\text{CH}^3\text{Br-CO-CH}^2\text{-CH}^3$  pour le second (1 Brome-2 Butanone).

Les points d'ébullition trouvés sont les mêmes et le dosage du brome permet de voir que ce sont bien des dérivés monobromés. Nous avons obtenu avec le premier, par exemple, les nombres suivants :

Poids de matière . . . . .	<sup>gr</sup> 0,3457
Bromure d'argent . . . . .	0,4285

D'où en centièmes :

Br % (obs.) 52,74

Br % (théor.) 52,94

Nous pouvons donc conclure de là que l'électrolyse de l'acide bromhydrique en présence de méthyléthylcétone donne naissance à deux dérivés monobromés identiques à ceux de M. Van Reymenant, dans lesquels le brome est dans le radical ( $\text{CH}^2$ ) ou ( $\text{CH}^3$ ) le plus voisin de (CO). Le dérivé secondaire est plus abondant que le dérivé primaire.

Comme dans les recherches précédentes, nous nous sommes préoccupé de déterminer les meilleures conditions d'opération, et en particulier nous avons étudié l'action de l'hydrogène naissant.

Les autres données du problème, intensité du courant, température, composition de l'électrolyte, n'ont fourni aucun résultat méritant d'être noté. Il était, au contraire, nécessaire de voir si l'hydrogène naissant serait nuisible ici, comme dans le cas de l'acétone ordinaire monobromée. Disons de suite que l'influence de l'hydrogène naissant est très grande, et cela d'autant mieux que l'on emploie un courant plus intense. Des expériences faites simultanément avec ou sans diaphragme poreux et l'emploi de la méthode d'OEttel ont conduit aux mêmes résultats.

Le tableau suivant met nettement en évidence ce que nous venons d'indiquer.

### Méthyléthylcétone monobromée.

	Méthyléthylcétone . . . . .	50 <sup>cc</sup>
<i>Composition de l'électrolyte.</i>	Acide bromhydrique à 65° B. .	35 <sup>cc</sup>
	Eau. . . . .	15 <sup>cc</sup>

Durée de l'électrolyse : 9 heures. — Température moyenne : 20°.

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz. Ionnant.	Hydrogène. (th.)	Hydrogène. (obs.)	Perte.
	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
9 30	2,29	47,3	31,6	28,8	2,8
10 »	2,30	48,3	32,2	29,3	2,9
10 30	2,29	46,7	31,2	28,0	3,2
11 »	2,29	47,5	31,7	27,9	3,8
»	»	»	»	»	»
1 30	2,26	46,5	31,0	18,0	13,0
2 »	2,15	47,1	31,4	16,8	14,6
2 30	2,30	50,5	33,7	17,2	16,5
3 »	2,25	46,2	30,8	15,8	15,0
3 30	2,25	47,6	31,8	16,5	15,3
4 »	2,25	45,5	30,4	14,0	16,4
4 30	2,20	46,5	31,0	14,5	16,5
5 »	2,20	45,7	30,5	13,4	17,1
5 30	2,15	44,2	29,8	12,8	17,0
6 »	2,20	43,9	29,3	12,9	16,4
6 30	2,20	47,2	31,5	13,6	17,9
(Arrêt)					

Le produit brut, simplement distillé et desséché, pesait 49<sup>gr</sup>107, alors qu'une électrolyse faite en même temps, dans les mêmes conditions, mais en employant un vase poreux, donnait un produit pesant 61<sup>gr</sup>922.

### C. — Électrolyse de l'Acide Iodhydrique.

L'action de l'iode sur la méthyléthylcétone se produit très difficilement, et jusqu'ici il n'a été étudié aucun dérivé iodé de cette acétone. Les résultats que nous avons obtenus dans l'électrolyse de l'acide iodhydrique, bien que médiocres au point de vue du rendement, nous permettent en revanche d'indiquer la formation d'un corps monoiodé. Si, en effet, on fait passer le courant électrique dans un mélange d'acide iodhydrique et d'eau (méthyléthylcétone 30<sup>cc</sup>, —

acide bromhydrique, 30°; — eau, 40°), on n'obtient de résultats appréciables que si l'on porte la température du mélange au voisinage de 65°. Dans ces conditions, et avec de faibles intensités de courant, 0<sup>amp.</sup>5 au maximum, on trouve au fond du vase anodique un liquide lourd, très fortement coloré par l'iode en excès. Ce produit agit très vivement sur les yeux comme les dérivés de substitution déjà étudiés.

Nous avons pu arriver à enlever l'excès d'iode en faisant tomber le liquide lourd, goutte à goutte, dans une solution concentrée d'hypo-sulfite de sodium, et en agitant jusqu'à décoloration presque complète. Il reste ainsi un liquide brun que nous avons pu dessécher sur du chlorure de calcium et analyser après filtration.

Deux dosages d'iode nous ont montré que l'on avait affaire à un dérivé monoiodé :

I. Poids de matière. . . . .	0,3938 <sup>gr</sup>
Iodure d'argent. . . . .	0,4696
II. Poids de matière. . . . .	0,5203
Iodure d'argent. . . . .	0,6224

soit, en centièmes,

IODE (OBSERVÉ)		IODE CALCULÉ POUR
I	II	C <sup>6</sup> H <sup>7</sup> IO
64,43	64,63	64,14

Nous n'avons pu déterminer la formule de constitution de ce corps ni savoir s'il est formé de deux isomères. Il se décompose très facilement sous l'action de la lumière et de la chaleur et nous n'en avons jamais obtenu que de très faibles quantités.

### D (1). — Électrolyse de l'iodure de potassium. — Préparation de l'iodoforme.

Nous avons vu que, en électrolysant l'iodure de potassium en liqueur légèrement alcaline, en présence d'acétone ordinaire, on obtient avec

(1) Pour cette acétone et les suivantes, nous avons réservé l'électrolyse des chlorures et bromures alcalins jusqu'au jour où nous aurons résolu d'une façon complète le problème de la préparation électrolytique du chloroforme et du bromoforme avec l'acétone ordinaire.

d'assez bons rendements de l'iodoforme pur. Il était par suite naturel de rechercher si la substitution de la méthyléthylcétone à l'acétone ordinaire modifierait les résultats et comment se produirait cette modification.

La méthyléthylcétone étant moins soluble dans l'eau contenant un sel en dissolution, comme l'iodure de potassium, que dans l'eau pure, nous avons, pour éviter des pertes, imaginé de faire arriver goutte à goutte l'acétone dans le liquide électrolytique. On voit alors presque immédiatement le liquide se troubler; puis, bientôt après, se déposent sur l'anode et au fond du vase de très légers cristaux jaunes, qui ne sont autre chose que de l'iodoforme pur. Si l'intensité du courant n'est pas trop grande, le liquide reste parfaitement incolore, et ce n'est que vers la fin de la réaction que l'on aperçoit une légère teinte jaune. Dans nos expériences, l'intensité a toujours été inférieure à  $0^{\text{amp}}.4$  et a presque toujours oscillé entre  $0^{\text{amp}}.1$  et  $0^{\text{amp}}.2$ . La température du voltamètre était maintenue constante par un bain-marie et ne dépassait pas  $50^{\circ}$ .

Le liquide électrolytique a été constitué par une solution étendue d'iodure de potassium (5 grammes d'iodure de potassium pour 100 grammes d'eau) à laquelle on ajoutait soit du carbonate de potassium, soit quelques centimètres cubes d'une solution de potasse. On observe toujours que, dès que l'alcalinité devient un peu grande, le rendement en iodoforme va en diminuant. Nous avons même obtenu d'assez bons résultats en partant d'une liqueur ne contenant que de l'iodure de potassium. L'alcalinité qui prend naissance dans la marche même de la réaction, est suffisante pour donner naissance à l'iodoforme. Au début, le liquide est alors un peu coloré, mais, au bout de peu de temps, la décoloration est complète et l'iodoforme prend naissance.

Ayant ainsi démontré la formation d'iodoforme par l'électrolyse de l'iodure de potassium en présence de méthyléthylcétone, il nous a fallu rechercher quels étaient les corps qui prenaient en outre naissance dans cette réaction.

Il suffit, pour résoudre ce problème, de suivre point par point la méthode qui nous a servi pour l'acétone ordinaire, et les résultats obtenus sont ceux que l'analogie permet de prévoir.

Si, en effet, l'iodoforme est produit aux dépens du groupe  $(\text{CH}^3)$  qui est en contact immédiat avec le groupe carbonyle  $(\text{CO})$ , la méthyl-

éthylcétone doit donner de l'acide propionique, et la réaction peut être formulée de la façon suivante :



A côté des 3 molécules d'iode mises en liberté par le courant électrique, 6 atomes de potassium ont pris naissance, mais ils ont donné aussitôt 6 molécules de potasse qui ne trouvent, pour les saturer, que 4 molécules acides, 3 molécules d'acide iodhydrique et une molécule d'acide propionique. Par suite, l'alcalinité de la liqueur va en augmentant et devient une gêne pour la bonne marche de la réaction. Ici encore on peut neutraliser l'excès d'alcalinité par un courant de gaz carbonique.

Voyons maintenant si l'expérience a confirmé ces prévisions. Après avoir séparé l'iodoforme de l'électrolyte, nous avons fait disparaître l'iode et ses dérivés comme précédemment par l'emploi du sulfate de cuivre et du sulfure de carbone suivi d'une ou de deux distillations en présence d'acide sulfurique. Le liquide distillé était alors soumis à une distillation fractionnée (méthode Duclaux) et l'acidité déterminée avec de l'eau de chaux en présence de phtaléine du phénol.

Voici, dans le cas actuel, les nombres trouvés :

Volumes distillés.	Vol. d'eau de chaux.	Volume %.	Nombres théoriques. pour $\text{C}^3\text{H}_8\text{O}_2$ .
10	12,6	12,0	12,1
20	25,0	23,9	24,0
30	36,7	35,2	35,3
40	48,1	46,1	46,2
50	59,0	56,6	56,8
60	69,3	66,5	66,7
70	79,4	76,1	76,2
80	88,6	85,0	85,0
90	97,1	93,1	93,0
100	104,2	100,0	100,0

L'accord est parfait entre la théorie et nos expériences ; la formule admise plus haut représente donc bien la réalité des faits.

## II. Méthylpropylcétone (2-Pentanone).

La méthylpropylcétone qui a servi à nos expériences, est la méthylpropylcétone du commerce que nous avons soumise à des rectifications et purifications successives.



Pour nous assurer de sa pureté, nous en avons fait l'analyse élémentaire, et nous avons déterminé ses constantes physiques : point d'ébullition, densité à l'état liquide, densité de vapeur.

Voici les résultats obtenus :

1° Analyse élémentaire :

Poids de matière. . . . .	0,2031
Gaz carbonique. . . . .	0,5188
Eau. . . . .	0,2133

D'où en centièmes :

	OBSERVÉ	CALCULÉ POUR $C^8H^{10}O$
C. . .	69,62	69,76
H. . .	11,66	11,62
O. . .	18,72	18,60

2° Le point d'ébullition est de  $102^\circ$  sous la pression de  $761^{mm}$ .

3° La densité à l'état liquide, prise à  $17^\circ 5$ , est égale à :  $d = 0,8105$ .

4° Enfin la détermination de la densité de vapeur par la méthode de Meyer, nous donne les résultats suivants :

Matière employée. . . . .	0gr0665
Hauteur barométrique corrigée. . . . .	$766^{mm}9$
Volume de l'air déplacé. . . . .	$19^{cc}0$
Température à laquelle la lecture a été faite. . . . .	$21^\circ 2$

D'où  $D = 2,96$ .

La densité théorique est  $D_{th} = 2,97$ .

C'est ce corps que nous avons soumis à l'action du chlore, du brome ou de l'iode naissant, soit en milieu acide, soit en milieu alcalin.

### A. Electrolyse de l'Acide Chlorhydrique.

La méthylpropylcétone, encore plus que la méthyléthylcétone, est peu soluble dans l'eau ; mais elle est assez soluble dans l'eau acidulée et se mélange très facilement à l'acide chlorhydrique pur. Aussi, avons-nous dû nous préoccuper tout d'abord de voir quelles seraient, dans le cas actuel, les meilleures conditions de l'électrolyse.

Pour éviter l'emploi d'une trop grande quantité d'acétone, nous avons fait nos premières recherches sur de la méthylpropylcétone en présence d'une solution étendue d'acide chlorhydrique. Dans ces conditions les rendements en dérivé chloré sont très faibles, et de plus la pureté du produit brut laisse beaucoup à désirer, surtout si l'on ne prend pas la précaution d'opérer sur un liquide homogène. Dans une expérience où une partie de l'acétone ne s'était pas dissoute et flottait à la surface de l'électrolyte, le composé chloré obtenu était mélangé à de l'acétone non attaquée, et l'on perdait ainsi en partie le bénéfice de la méthode électrolytique que nous exposons dans ce travail.

Nous avons par suite été amené à n'opérer que sur des liquides homogènes, et pour cela, il a fallu augmenter l'acidité de la liqueur. Les rendements obtenus sont d'ailleurs bien meilleurs si l'on mélange parties égales d'acide chlorhydrique pur et de méthylpropylcétone pure.

Les résultats que nous ont fournis ces électrolyses, sont de tous points comparables à ceux que nous avons obtenus avec les acétones précédemment étudiées.

Au bout d'un temps plus ou moins long suivant l'intensité du courant, le liquide se divise en deux phases distinctes qu'il est ensuite possible de séparer par décantation. Une distillation en présence d'eau, suivie d'une dessiccation sur du chlorure de calcium fondu, permet d'avoir un dérivé chloré que l'on n'a plus qu'à étudier.

La distillation de ce produit sous la pression atmosphérique permet de séparer un premier corps bouillant au voisinage de 136-137° (1). Un résidu plus coloré que le liquide distillé restait dans le ballon et bouillait à une température supérieure à 140°.

Mais comme à ce moment-là se produit une décomposition manifeste de la substance considérée, il nous a été impossible de voir si nous avions un autre dérivé monochloré.

Le corps bouillant à 136-137° est une méthylpropylcétone monochlorée, comme le montrent les résultats suivants :

#### 1° Dosage du chlore.

	gr
Matière employée. . . . .	0,3327
Chlorure d'argent . . . . .	0,3926

(1) VLADESCO donne pour température d'ébullition de ce corps 130-133°. Le produit que nous avons recueilli entre ces deux températures était légèrement impur. Le dosage du chlore fournissait un nombre un peu faible.

Soit en centièmes :

	OBSERVÉ	CALCULÉ POUR $C^5H^9ClO$
Cl % . . . .	29,18	29,46

2° Densité de vapeur. .

Matière employée . . . . .	0 <sup>gr</sup> 0860
Hauteur barométrique corrigée . . . . .	770 <sup>mm</sup> ;3
Volume de l'air déplacé. . . . .	17 <sup>cc</sup> 1
Température à laquelle la lecture a été faite	15°5

D'où  $D = 4,12$

La densité théorique est  $D_{th} = 4,17$

Cette méthylpropylcétone monochlorée est identique à celle qu'a préparée Vladesco; c'est le dérivé secondaire correspondant à la formule  $CH^3-CO-CHCl-CH^2-CH^3$  (Chlore 3. Pentanone 2).

Comme dans les recherches précédentes, nous avons dû nous préoccuper de l'influence de l'hydrogène naissant, et nous avons ici encore observé que si, au point de vue chimique, l'hydrogène naissant était sans action sur le dérivé chloré formé, il était néanmoins préférable d'employer un vase poreux. Nous avons été conduit à ces résultats par les mêmes méthodes que précédemment.

Voici, à titre d'exemple, les nombres obtenus dans une électrolyse faite sans vase poreux.

### Préparation de la Méthylpropylcétone monochlorée.

Composition de l'électrolyte.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Méthylpropylcétone} . 50^{cc} \\ \text{Acide chlorhydrique} . 50^{cc} \end{array} \right.$

Durée de l'électrolyse : 8 heures. — Température moyenne : 18°

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz tonnant.	Hydrogène. (th.)	Hydrogène. (obs.)	Perte.
—	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
10 30	2,35	46,3	30,9	30,3	0,6
11 »	2,35	46,7	31,2	30,8	0,4
11 30	2,40	46,1	30,8	30,4	0,4
12 »	2,37	47,5	31,7	31,4	0,3
1 30	2,40	47,5	31,7	31,2	0,5
2 »	2,40	44,9	30,0	29,9	0,1
2 30	2,37	46,2	30,8	30,8	0,0

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz tonnant.	Hydrogène. (th.)	Hydrogène. (obs.)	Perte.
	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
3 »	2,35	43,1	28,8	28,2	0,6
3 30	2,25	»	»	»	»
4 »	2,25	44,6	29,8	29,6	0,2
4 30	2,20	49,0	32,7	32,7	0,0
5 »	2,15	46,8	31,2	31,5	— 0,3
5 30	2,15	47,2	31,5	31,5	0,0
6 »	2,15	47,7	31,8	31,7	0,1
6 30	2,15	46,7	31,2	30,9	0,3

Le produit brut obtenu pesait 40<sup>gr</sup>088.

A remarquer que la différence de potentiel aux bornes du voltamètre varie bien moins que dans le cas où l'on n'a pas employé de vase poreux. Dans ce dernier cas, en effet, une électrolyse faite en même temps, dans les mêmes conditions, sauf dans l'emploi du vase poreux, a manifesté une variation continuelle de la force électromotrice qui est passée de 3<sup>v</sup>5 à 7<sup>v</sup>3.

## B. Electrolyse de l'Acide Bromhydrique.

L'électrolyse de l'acide bromhydrique en présence de la méthylproplycétone n'a présenté aucun phénomène particulier. Elle a été conduite de la même façon que les précédentes, et les résultats ont été de même nature.

Le produit obtenu est un dérivé monobromé ou plutôt un mélange de dérivés monobromés. Il nous a été impossible de les séparer d'une façon précise. Si, en effet, on soumet le mélange à une distillation fractionnée sous la pression atmosphérique, l'ébullition est accompagnée d'une décomposition plus ou moins grande et la séparation ne peut se faire. Si on opère sous pression réduite ou dans le vide, il y a une faible différence de température entre les points d'ébullition des isomères sous ces basses pressions, et l'on ne peut davantage les séparer.

Il est toutefois possible de montrer que l'on a réellement obtenu un dérivé monobromé. Nous avons mis à part le produit de la distillation qui a été recueilli au voisinage de 120° sous la pression de 300 millimètres de mercure. A ce moment-là, le thermomètre restait sensiblement stationnaire et une grande partie du liquide distillait.

Le dosage du brome nous a donné les nombres suivants :

	<small>gr</small>
Matière employée. . . . .	0,3725
Bromure d'argent . . . . .	0,4227

D'où en centièmes :

	OBSERVÉ	CALCULÉ POUR $C^5H^9BrO$
Br % . . . . .	48,29	48,48

La détermination de la densité de vapeur par la méthode de Meyer conduit aux mêmes résultats :

Matière employée . . . . .	0gr0691
Hauteur barométrique corrigée . . . . .	744mm6
Volume de l'air déplacé . . . . .	10cc5
Température à laquelle la lecture a été faite	21°5
D'où	$D = 5,63$
La densité théorique est	$D_{th} = 5,71$

Nous avons donc bien obtenu l'un au moins des dérivés monobromés ; et par analogie avec ce que nous avons observé précédemment il est vraisemblable de penser que la bromuration s'est effectuée au voisinage du carbonyle. Nous nous proposons d'étudier ultérieurement en détail ces divers composés et nous espérons pouvoir en donner alors la véritable formule de constitution.

Quoi qu'il en soit, ici comme dans toutes les électrolyses faites avec l'acide bromhydrique, nous avons observé que l'hydrogène naissant réduisait la monobromacétone formée.

Une première preuve en est obtenue en faisant simultanément deux électrolyses où toutes les conditions sauf une sont les mêmes ; il n'y a de différence que dans l'emploi du vase poreux dans la première, alors que dans la seconde, aucune séparation n'existe entre l'anode et la cathode. La première expérience donne un poids de monobromacétone très nettement supérieur à celui que fournit la seconde.

La méthode d'Oettel vient confirmer ces résultats.

## Préparation de la Méthylpropylcétone monobromée.

<i>Composition de l'électrolyte.</i>	Méthylpropylcétone . . . .	50 <sup>cc</sup>
	Acide bromhydrique à 65° B.	35 <sup>cc</sup>
	Eau . . . . .	15 <sup>cc</sup>

Durée de l'électrolyse : 8 heures. — Température moyenne : 22°

Heure de l'observation	Intensité	Gaz tonnant	Hydrogène (th.)	Hydrogène (obs.)	Perte
	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
2 »	2,35	45,9	30,6	30,6	0,0
2 30	2,40	45,9	30,6	30,9	— 0,3
3 »	2,40	47,3	31,6	29,2	2,4
3 30	2,37	47,1	31,4	28,3	3,1
4 »	2,32	48,3	32,2	27,1	5,1
4 30	2,40	49,6	33,1	25,7	7,4
5 »	2,28	46,5	31,0	21,7	9,3
5 30	2,25	47,5	31,7	22,1	9,6
6 »	2,28	49,3	32,9	23,5	9,4
6 30	2,28	49,9	33,3	24,1	9,2
( <sup>1</sup> ) 7 »	2,27	48,9	32,6	20,4	12,2
( <sup>2</sup> ) 8 30	2,37	47,4	31,6	25,3	6,3
9 »	2,37	48,1	32,1	24,0	8,1
9 30	2,20	48,3	32,2	24,0	8,2
10 »	2,25	48,0	32,0	24,0	8,0
10 30	2,20	47,2	31,5	23,0	8,5
11 »	2,20	49,0	32,7	22,7	10,0
11 30	2,20	48,2	32,2	19,7	12,5

Ce tableau appelle deux remarques : d'abord, il est facile de constater que la réduction du dérivé bromé, nulle au début, croît lentement mais d'une façon continue, à mesure que la proportion de ce dérivé bromé tend à croître au sein de l'électrolyte. En outre, lorsque, après une interruption de douze heures, le liquide s'est divisé par le repos en deux couches distinctes, on voit, en faisant de nouveau passer le courant, que la réduction est moindre qu'au moment de l'arrêt, mais avec une tendance très marquée à redevenir ce qu'elle était à ce moment-là. Cette moindre réduction tient évidemment à ce que l'acétone bromée qui est au fond du récipient, échappe complètement à l'action nuisible de l'hydrogène naissant.

(<sup>1</sup>) Interruption de l'expérience.(<sup>2</sup>) Nouvelle mise en marche.

### C. — Electrolyse de l'Acide iodhydrique.

L'électrolyse de l'acide iodhydrique en présence de la méthylpropylcétone ne donne de résultats appréciables que si l'on opère à chaud, avec des courants de faible intensité. Dans ce cas, comme dans ceux précédemment étudiés, l'iode a peu d'action sur la méthylpropylcétone dans laquelle il se dissout tout d'abord. Ce n'est qu'ensuite, la chaleur aidant, que l'iode se substitue à l'hydrogène. Les rendements en produit iodé sont toujours très faibles.

Nous avons pu isoler un corps légèrement ambré, agissant d'une façon très vive sur les muqueuses, en agitant la masse noire obtenue avec une solution concentrée d'hyposulfite de sodium. Ce corps, desséché sur du chlorure de calcium, a été soumis à l'analyse. Il a donné les résultats suivants :

	gr
Poids de matière. . . . .	0,4449
Iodure d'argent. . . . .	0,4896

Soit en centièmes,

I % . . . . .	59,46
Nombre calculé pour $C^5H^9IO$ , 1 % . . . . .	59,90

Le corps obtenu est donc une méthylpropylcétone moniodée.

Nous avons eu en notre possession une trop faible quantité de ce produit pour que nous ayons pu en déterminer la formule de constitution. Il semble vraisemblable de penser que, ici comme dans les recherches précédentes, on a affaire non pas à un seul dérivé moniodé, mais bien plutôt à un mélange de divers isomères.

### D. — Electrolyse de l'Iodure de potassium.

L'électrolyse de l'iodure de potassium en présence de la méthylpropylcétone, en liqueur alcaline, devait vraisemblablement nous donner de l'iodoforme et un acide volatil, l'acide butyrique, si les résultats obtenus avec l'acétone ordinaire et la méthyléthylcétone n'étaient pas des cas exceptionnels.

L'expérience a été conduite comme avec la méthyléthylcétone. La

solution aqueuse d'iode de potassium a été, au début, rendue très légèrement alcaline par l'addition de quelques centimètres cubes d'une solution de potasse à 10 %. Cette addition est nécessaire si l'on veut voir se produire la formation d'iodoforme dès que l'on fera arriver l'acétone dans l'électrolyte traversé par un courant de très faible intensité. En revanche, une trop grande quantité d'alcali serait nuisible, car, ici encore, la marche de la réaction tend à faire croître la richesse en potasse de la dissolution.

Quant à l'acétone, qui est très peu soluble dans l'eau contenant des sels en dissolution, elle ne doit être ajoutée que goutte à goutte. Dans la pratique, nous introduisons quelques dixièmes de centimètre cube toutes les cinq minutes, suivant l'intensité du courant et la température.

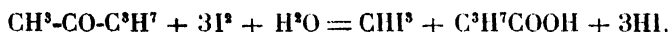
Bien que les rendements en iodoforme ne soient pas très grands, on obtient assez rapidement quelques grammes de ce corps dans un état de pureté parfaite.

Ce résultat acquis, il restait à démontrer qu'il s'était formé en même temps de l'acide butyrique. Cette démonstration ne fut pas difficile à faire, car le liquide débarrassé de l'iodoforme présentait d'une façon indéniable l'odeur des butyrates. Mais la méthode de M. Duclaux pour le dosage des acides volatils, appliquée comme précédemment, a pleinement confirmé nos prévisions.

Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur le tableau suivant :

Volumes distillés.	Volumes d'eau de chaux.	Volumes %..	Nombres calculés pour $C^4H^{10}O^2$ .
cc.	cc.	cc.	cc.
10	13,5	17,3	17,6
20	25,7	33,0	33,6
30	36,3	46,6	47,5
40	45,8	58,8	60,0
50	54,0	69,4	70,6
60	61,4	78,5	79,5
70	66,8	85,8	86,5
80	71,6	92,0	92,5
90	75,3	96,7	97, »
100	77,8	100, »	100, »

Ces résultats sont suffisamment démonstratifs pour que nous n'ayons pas besoin d'insister davantage et que nous puissions écrire la réaction de la façon suivante :





Remarquons que, ici encore, 4 molécules d'acide prennent naissance, alors que l'électrolyse de l'iodure de potassium met en liberté 6 atomes de potassium qui se transforment en 6 molécules de potasse. L'électrolyte devient par suite de plus en plus alcalin, comme nous l'avons indiqué plus haut.

### III. Diéthylcétone (3-Pentanone) $\text{C}^3\text{H}^5\text{-CO-C}^3\text{H}^5$

La diéthylcétone, que nous allons étudier maintenant, a été tout d'abord soumise aux mêmes traitements de purification que les acétones précédentes. Nous avons admis sa pureté après avoir déterminé sa composition centésimale, sa densité à l'état liquide, sa densité de vapeur et son point d'ébullition.

Nous avons ainsi trouvé les résultats suivants :

#### 1<sup>o</sup> Analyse de la diéthylcétone :

Poids de matière. . . . .	gr 0,2385
Gaz carbonique . . . . .	0,6115
Eau. . . . .	0,2513

Soit en centièmes :

	OBSERVÉ	CALCULÉ POUR $\text{C}^5\text{H}^{10}\text{O}$
C. . .	69,89	69,76
H. . .	11,78	11,62
O. . .	18,33	18,60
	100,00	99,98

2<sup>o</sup> La densité prise à l'état liquide est égale à  $d = 0,8210$  à  $16^{\circ}7$ .

3<sup>o</sup> La densité de vapeur a été déduite des nombres suivants :

Matière employée. . . . .	0 <sup>gr</sup> 0672
Hauteur barométrique corrigée. . . . .	766 <sup>mm</sup> 2
Volume de l'air déplacé. . . . .	18 <sup>cc</sup> 7
Température à laquelle la lecture a été faite. . . . .	15 <sup>o</sup> 5

D'où  $D = 2,96$ .

La densité théorique est  $D_{th} = 2,97$ .

4<sup>o</sup> La température d'ébullition, sous une pression de 755<sup>mm</sup>, est de  $101^{\circ}5$ .

Ayant ainsi préparé un corps pur, nous avons entrepris avec lui des recherches semblables aux précédentes.

## A. — Électrolyse de l'Acide Chlorhydrique.

La diéthylcétone est très peu soluble dans l'eau pure, elle l'est davantage dans l'eau acidulée, et se mélange sans difficulté à l'acide chlorhydrique concentré.

Nous avons soumis à l'électrolyse des mélanges de compositions diverses, l'acide chlorhydrique étant étendu ou concentré, et, bien que nous ayons opéré avec des intensités de courant très différentes (de 0<sup>amp</sup> 5 à 2<sup>amp</sup> 1), nous avons toujours trouvé des résultats analogues. Au bout d'un temps plus ou moins long suivant la richesse du liquide en acétone et suivant l'intensité du courant, il se sépare un liquide plus lourd que l'électrolyte au sein duquel il prend naissance. Ce liquide forme, à la partie inférieure du voltamètre, une couche qui augmente progressivement d'épaisseur au fur et à mesure de la marche de la réaction. Remarquons toutefois que, dans certaines expériences où l'on opérait avec peu d'acétone et une solution étendue d'acide chlorhydrique, le dérivé chloré venait flotter à la surface. Dans tous les autres cas, le produit formé tombait au fond, échappant ainsi à toute réaction ultérieure. Aussi doit-on se placer dans ces conditions expérimentales, si l'on veut obtenir de bons rendements.

Le liquide lourd, lavé et débarrassé d'acide chlorhydrique, est alors soumis à la distillation sous pression réduite en présence d'eau. L'ébullition se produit d'abord à une température voisine de 70° sous une pression de 321<sup>mm</sup>, puis vers la fin de la distillation, elle s'élève à 77° où elle demeure stationnaire. Le dérivé chloré est alors décanté, desséché sur du chlorure de calcium et porté à l'ébullition sous la pression atmosphérique. Les observations suivantes ont pu alors être faites : au début de l'ébullition passe un liquide mixte formé d'un peu d'acétone non attaquée et d'un dérivé chloré ; la température s'élève ainsi jusqu'à 135° où se manifeste un léger temps d'arrêt. Le thermomètre continue sa marche ascendante jusqu'à 144-145°. Vers la fin de la distillation le liquide résiduel noircit ; il y a décomposition et la température a tendance à s'élever. On arrête alors l'expérience ; mais, pour éviter de perdre le dérivé chloré non décomposé qui reste, il suffit d'ajouter de l'eau et de distiller le liquide mixte.

Le dosage du chlore dans le corps passant au voisinage de  $135^{\circ}$ , nous a toujours donné des nombres trop faibles, semblant par là indiquer que l'on a affaire à un dérivé monochloré insuffisamment purifié. Au contraire, l'étude du corps bouillant au voisinage de  $144-145^{\circ}$  nous a montré que l'on avait obtenu un dérivé monochloré de la diéthylcétone.

En effet, l'analyse élémentaire fournit les nombres suivants :

	gr
Poids de matière . . . . .	0,3784
Chlorure d'argent. . . . .	0,4475

Soit en centièmes :

	OBSERVÉ	CALCULÉ POUR C <sup>4</sup> H <sup>9</sup> ClO
Cl % . .	29,24	29,46

La détermination de la densité de vapeur nous a en outre donné :

Poids de matière . . . . .	0 <sup>gr</sup> 0861
Hauteur barométrique corrigée . . . . .	763 <sup>mm</sup> 5
Volume de l'air déplacé . . . . .	17 <sup>cc</sup> 2
Température à laquelle la lecture a été faite. . .	16 <sup>o</sup>

D'où  $D = 4,15$ .

La densité théorique est  $D_{th} = 4,17$ .

Le dérivé monochloré ainsi obtenu est identique à celui qui a été préparé par Vladesco et auquel ce chimiste attribue la formule de constitution  $CH^3-CH^2-CO-CHCl-CH^3$ .

Ayant ainsi démontré la formation d'un dérivé monochloré de la diéthylcétone, nous avons recherché si l'hydrogène naissant avait une influence nuisible sur le rendement, et nous avons, dans ce but, fait des expériences comparatives en permettant à l'hydrogène de réagir ou non sur le produit formé, tout en utilisant en même temps la méthode d'œtzel.

Nous avons ainsi obtenu les résultats suivants.

## Préparation de la Diéthylcétone monochlorée.

*Composition de l'électrolyte.* { Diéthylcétone . . . . 50<sup>cc</sup>  
Acide chlorhydrique. 50<sup>cc</sup>

Durée de l'électrolyse : 10 heures.

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz tonnant.	Hydrogène. (th.)	Hydrogène. (obs.)	Perte.
	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
8 »	2,25	44,4	29,6	29,4	0,5
8 30	2,25	45,3	30,2	30,2	0,0
9 »	2,29	47,4	31,6	31,3	0,3
9 30	2,29	47,4	31,6	31,5	0,1
10 »	2,29	49,0	32,7	32,6	0,1
12 30	2,15	45,5	30,4	30,6	— 0,2
1 30	2,12	46,0	30,7	30,6	0,1
2 »	2,12	46,5	31,0	31,0	0,0
2 30	2,10	46,5	31,0	31,2	— 0,2
3 »	2,10	49,0	32,7	32,6	0,1
3 30	2,15	47,0	31,5	31,6	— 0,1
4 »	2,20	48,6	32,4	32,5	— 0,1
4 30	2,15	47,8	31,9	31,7	0,2
5 »	2,10	42,7	28,5	28,9	— 0,4
5 30	2,00	48,3	32,2	32,9	— 0,7
6 »	2,00	46,2	30,8	31,3	— 0,5

Les nombres de ce tableau nous montrent d'abord qu'il n'y a pas eu de réduction sensible du composé chloré par l'hydrogène naissant. C'est d'ailleurs ce qui a été confirmé par l'expérience directe, car une autre électrolyse faite en même temps, dans les mêmes conditions, mais en évitant l'action possible de l'hydrogène par l'emploi d'un vase poreux, nous a donné une quantité de dérivé chloré brut presque identique à la première. Nous avons en effet obtenu avec le vase poreux 28<sup>gr</sup>354 et sans diaphragme 27<sup>gr</sup>664, soit une différence de 0<sup>gr</sup>690.

Il est à remarquer que la résistance de l'électrolyte dans le premier cas augmente considérablement (de 3<sup>v</sup> à 7<sup>v</sup>), alors qu'elle reste presque constante si l'on n'interpose aucune cloison entre l'anode et la cathode (4<sup>v</sup>6 à 5<sup>v</sup>5).

Enfin, nous avons observé sur l'anode, vers la fin de l'électrolyse, un léger dégagement gazeux, ce qui est vraisemblablement la cause du faible excès de gaz constaté à la fin.

Quoi qu'il en soit, nous pouvons affirmer que l'hydrogène naissant ne réduit pas, dans les conditions précédentes, le dérivé chloré, mais que néanmoins les résultats sont meilleurs à tous les points de vue, si l'on sépare l'anode de la cathode par une cloison poreuse.

## B. — Électrolyse de l'Acide Bromhydrique.

L'électrolyse de l'acide bromhydrique en présence de la diéthylcétone se produit dans des conditions tout à fait semblables à celles que nous avons observées avec les acétones précédemment étudiées.

Le mélange de la diéthylcétone avec l'acide bromhydrique en solution ne se fait bien que si l'on opère avec un acide concentré. On a alors un liquide homogène qui ne tarde pas à se diviser en deux couches lorsqu'il est traversé par le courant électrique. Nous avons toujours opéré de la même façon, avec des courants dont l'intensité a varié de 0<sup>amp.</sup>9 à 2<sup>amp.</sup>3. Les résultats ont été de même nature.

Le produit obtenu est un dérivé monobromé, bouillant au voisinage de 150°, mais qui, à cette température, est déjà partiellement décomposé, de telle sorte qu'il ne nous a pas été possible d'en déterminer la densité de vapeur.

Sa formule est vraisemblablement :  $\text{CH}^3\text{-CH}^2\text{-CO-CHBr-CH}^3$ .

Le dosage du brome dans ce corps nous a donné les nombres suivants :

	gr
Poids de matière. . . . .	0,5390
Bromure d'argent. . . . .	0,6098

Soit en centièmes :

	OBSERVÉ	CALCULÉ POUR $\text{C}^5\text{H}^8\text{BrO}$
Br %.	48,12	48,48

Enfin, en ce qui concerne l'influence de l'hydrogène naissant, nous avons observé que l'on devait éviter son action, la diéthylcétone monobromée étant partiellement réduite, comme le montrent les résultats suivants, fournis par l'application de la méthode d'Oettel.

## Préparation de la Diéthylcétone monobromée

<i>Composition de l'électrolyte.</i>	Diéthylcétone . . . . .	50 <sup>cc</sup>
	Acide bromhydrique à 65° B.	35 <sup>cc</sup>
	Eau . . . . .	15 <sup>cc</sup>

Durée de l'électrolyse. : 10 heures

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz tonnant.	Hydrogène (th.)	Hydrogène (obs.)	Perte.
	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
8 »	2,34	45,2	30,2	28,8	1,3
8 30	2,34	46,5	31,0	29,5	1,8
9 »	2,31	47,5	31,7	29,0	2,7
9 30	2,31	46,7	31,2	27,9	3,2
11 »	2,20	46,4	31,0	27,5	3,6
1 »	2,20	46,2	30,8	27,4	3,4
1 30	2,20	45,5	30,4	27,0	3,3
2 »	2,16	45,5	30,4	25,1	5,2
2 30	2,25	45,9	30,6	23,3	7,3
3 »	2,16	47,3	31,6	24,1	7,4
3 30	2,16	47,2	31,5	22,6	8,9
4 »	2,16	49,5	33,0	22,2	10,8
4 30	2,15	48,0	32,0	19,2	12,8
5 »	2,12	47,1	31,4	16,2	15,2
5 30	2,10	46,0	30,7	15,2	15,5
6 »	2,10	47,4	31,6	15,0	16,6

On voit encore ici que l'hydrogène naissant réduit le dérivé bromé formé et que l'on a tout intérêt à l'éliminer par l'emploi d'une cloison poreuse.

## C. — Electrolyse de l'Acide Iodhydrique.

Les résultats obtenus jusqu'ici dans cette électrolyse étant très mauvais, nous ne ferons que les mentionner. Le produit lourd, séparé de l'électrolyte, n'a pu être suffisamment purifié pour être analysé.

## D. — Electrolyse de l'iodure de potassium.

La présence dans les trois acétones que nous avons étudiées jusqu'ici d'un radical méthyle voisin du carbonyle de l'acétone, permet de se rendre compte facilement de la formation de l'iodoforme que nous

avons constatée. Il était par suite intéressant de voir ce qui arriverait lorsque ce groupe méthyle serait remplacé par un autre radical. C'est dans le but de résoudre ce problème que nous avons entrepris les expériences suivantes avec la diéthylcétone.

Le liquide électrolytique employé a été une solution d'iodure de potassium contenant 10<sup>gr</sup> de sel pour 100<sup>cc</sup> d'eau. On l'additionnait en outre de quantités plus ou moins grandes de potasse. C'est ainsi que nous avons fait trois expériences consécutives dans lesquelles nous avons ajouté à l'électrolyte 5<sup>gr</sup> ou 2<sup>gr</sup> de potasse ou enfin 5<sup>cc</sup> d'une solution de potasse à 10 %. Dans ces électrolyses, l'acétone était ajoutée par fraction de centimètre cube toutes les dix minutes.

Les deux premières expériences ne nous ont donné que de très mauvais résultats; le liquide se colorait et l'on n'obtenait que de très faibles quantités d'iodoforme.

Dans la troisième électrolyse, au contraire, la formation de l'iodoforme qui, au début, fut un peu lente, ne tarda pas à s'accroître, et, finalement, les rendements furent assez satisfaisants. Le liquide électrolytique était resté incolore.

A chaque addition d'acétone, celle-ci dissout de l'iode, des gouttelettes noirâtres se déplacent à la surface du liquide et disparaissent peu à peu en donnant naissance à de l'iodoforme; il en résulte que l'on peut régler très facilement l'introduction de l'acétone dans l'électrolyte.

Ces premières constatations faites, il fallait se demander comment on pourrait interpréter la réaction. L'étude du liquide résiduel nous a permis de résoudre la question.

Remarquons d'abord que, contrairement à ce que nous avons observé dans les autres électrolyses de l'iodure de potassium, le liquide reste sensiblement neutre, alors même que l'on a préparé une certaine quantité d'iodoforme; précédemment l'alcalinité allait en augmentant. Ainsi, dans une expérience faite sans addition préalable de potasse, il a suffi de faire arriver dans le liquide quelques gouttes d'acide sulfurique normal pour détruire toute alcalinité, et cela, après avoir obtenu deux grammes d'iodoforme. Ce fait est à retenir, car nous aurons plus loin à en tenir compte;

C'est ce liquide sensiblement neutre que nous avons alors traité par le procédé déjà décrit pour la reconnaissance des acides volatils formés. Disons simplement que l'addition du sulfate de cuivre a été accom-

pagnée d'un léger dégagement gazeux; en outre, le liquide a dû être distillé à deux reprises différentes, car, au début, l'ébullition est tumultueuse, il y a boursoufflement comme si la distillation était accompagnée d'un dégagement de gaz.

Le dosage des acides volatils nous a donné les nombres suivants :

Volumes distillés.	Volumes d'eau de chaux.	Volumes %.	Nombres théoriques pour C <sup>2</sup> H <sup>6</sup> O <sup>2</sup> .
cc.	cc.	cc.	cc.
10	15,7	12,3	12,1
20	30,8	24,2	24, »
30	45,1	35,5	35,3
40	58,5	46,1	46,2
50	71,4	56,3	56,8
60	83,8	66,1	66,7
70	95,8	75,6	76,2
80	107,1	84,5	85, »
90	116,9	92,3	93, »
100	126,8	100, »	100, »

Ces nombres montrent bien, sans contestation possible, qu'il y a dans le liquide distillé un acide volatil unique, l'*acide propionique*.

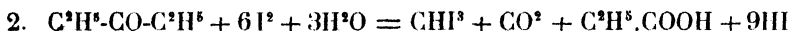
La présence de cet acide propionique n'a rien qui doive nous étonner; il était même facile de prévoir, d'après nos résultats antérieurs, que nous devions trouver ce corps, l'un des groupements C<sup>2</sup>H<sup>5</sup> étant resté fixé au carbonyle.

Quant à l'autre radical C<sup>2</sup>H<sup>5</sup>, celui qui a donné naissance à de l'iodoforme, nous ne savons encore comment il s'est dédoublé.

Deux hypothèses peuvent être faites : il s'est formé ou bien de l'acide formique ou bien de l'acide carbonique. La réaction peut être formulée de l'une des deux façons suivantes :



ou bien :



La méthode de M. Duclaux ne nous ayant pas montré l'existence de l'acide formique, nous sommes par là même autorisé à penser qu'il s'est formé de l'acide carbonique.

Un certain nombre de faits viennent d'ailleurs à l'appui de cette hypothèse :

C'est d'abord le dégagement gazeux qui accompagne le traitement



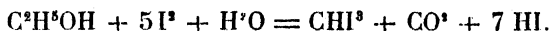
du liquide résiduel par le sulfate de cuivre. Il est analogue à celui que l'on obtient lorsqu'on ajoute une solution de sulfate de cuivre à du carbonate de potassium.

C'est, en outre, le fait de la neutralité constante de l'électrolyte. Nous avons remarqué précédemment que la mise en liberté d'un atome d'iode par le courant électrique était accompagnée d'une réaction secondaire donnant naissance à une molécule de potasse. Comme, d'autre part, la transformation de l'acétone en iodoforme fournit en même temps un ou plusieurs acides, l'électrolyte aura, en fin de compte, une réaction alcaline ou acide suivant que la potasse formée sera ou non en quantité suffisante pour neutraliser les acides considérés.

Dans le cas actuel, si nous admettons la première hypothèse, 10 atomes d'iode ont été mis en liberté par le courant; il en résulte la formation corrélatrice de 10 molécules de potasse. Il s'est formé en même temps une molécule d'acide formique, une molécule d'acide propionique et 7 molécules d'acide iodhydrique, soit en tout 9 molécules acides qui n'exigent que 9 molécules de potasse pour être neutralisées. Il y aura donc un excès de potasse et l'alcalinité de l'électrolyte ira en croissant avec la durée de la réaction.

Dans la seconde hypothèse, 12 molécules de potasse prennent naissance en même temps que 11 molécules d'acide; mais comme il s'est formé une molécule d'acide carbonique *bibasique*, il en résulte que la potasse et l'acide se neutralisent exactement. Par suite, si la liqueur est neutre au début de la réaction, elle sera neutre à la fin. Or, nous avons constaté qu'il en était ainsi. Cette hypothèse semble donc vérifiée par l'expérience.

Tout ce qui précède tend à montrer que le groupement  $C^2H^5$  s'est dédoublé pour donner  $CHI^3$  et  $CO^2$ . Ce fait se produit aussi dans la préparation de l'iodoforme au moyen de l'alcool éthylique. On écrit, en effet, la réaction de la façon suivante :

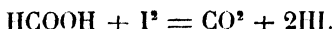


MM. F. Förster et W. Meves (1), qui ont en particulier étudié cette dernière réaction, admettent qu'il s'est formé de l'anhydride carbonique

(1) F. FÖRSTER UND W. MEVES, *Ueber die Herstellung von Iodoform auf elektrolytischem Wege* (Zeitschrift für Elektrochemie, t. IV, p. 268; 1897-98).

et non pas de l'acide formique, car, malgré des recherches minutieuses, *ils n'ont jamais constaté la formation d'acide formique.*

Nous avons voulu, à notre tour, voir s'il ne serait pas possible de constater l'existence de l'acide formique dans l'électrolyte et nous avons été ainsi amené à démontrer que, *dans les conditions mêmes où se produit la réaction donnant naissance à de l'iodoforme, c-à-d. à une température au moins égale à 40° ou 50°, l'acide formique ou son sel de potassium se décompose en présence d'iode d'après la réaction :*



Il suffit pour s'en convaincre de traiter le formiate de potassium en dissolution dans l'eau par quelques cristaux d'iode. A froid, il n'y a aucune réaction sensible, mais pour peu que la température s'élève et atteigne 40° ou 50° (température nécessaire pour avoir de l'iodoforme), on peut aussitôt constater le dégagement d'un gaz qui n'est autre que le gaz carbonique.

Il ne faut donc pas être étonné de ne pas trouver d'acide formique dans ces électrolyses; il se peut que cet acide ait tendance à se former; mais comme il ne saurait coexister en présence d'iode à une température de 40°, il disparaît et donne le gaz carbonique que nous retrouvons à l'état de carbonate alcalin.

Nous avons essayé ultérieurement de voir si du gaz carbonique ne se dégagait pas en même temps que l'hydrogène de la cathode. Nous avons dans ce but recueilli les gaz d'une expérience, et nous avons pu constater que nous n'avions que de l'hydrogène pur.

Au bout d'une heure, en effet, l'intensité du courant ayant oscillé entre 0<sup>amp.</sup>170 et 0<sup>amp.</sup>175, nous avons recueilli 78<sup>cc</sup>5 de gaz mesuré à 24° sur la cuve à eau, la pression atmosphérique étant de 757<sup>mm</sup>5. Rame-  
nant ce volume gazeux à 0° et à la pression de 760<sup>mm</sup>, on trouve 69<sup>cc</sup>5 de gaz pur et sec. Or la théorie indique que le gaz recueilli doit avoir un volume compris entre 68<sup>cc</sup> et 72<sup>cc</sup> si le gaz est de l'hydrogène pur. Le traitement par la potasse n'a donné aucune absorption sensible. L'analyse eudiométrique a enfin démontré que le gaz était de l'hydrogène pur.

Nous croyons donc pouvoir conclure en disant que la seconde formule exprime le terme final de la réaction, sans pouvoir toutefois affirmer qu'il n'y a pas eu formation transitoire d'acide formique.

IV. — Acétylacétone (2.4 Pentandione)  $\text{CH}_3\text{-CO-CH}_2\text{-CO-CH}_3$ .

Les recherches précédentes ont toutes été faites avec des acétones saturées de la série grasse, de formule générale  $\text{C}^n\text{H}^{2n}\text{O}$ . Il nous a paru intéressant de voir si les dicétones de formule  $\text{C}^n\text{H}^{2n-2}\text{O}^2$  se comporteraient de la même façon; et, comme l'une d'entre elles, l'*Acétylacétone* (2.4. Pentandione,  $\text{CH}_3\text{-CO-CH}_2\text{-CO-CH}_3$ ), est obtenue facilement depuis les travaux de A. Combes (1), nous l'avons soumise aux mêmes traitements que les acétones précédentes.

Le produit commercial n'étant pas en général chimiquement pur, nous avons dû le purifier par une série de distillations fractionnées. On obtient alors un liquide incolore dont l'étude conduit aux résultats suivants :

## 1° Analyse élémentaire :

	gr
Poids de matière. . . . .	0,2742
Gaz carbonique. . . . .	0,6015
Eau. . . . .	0,1983

Soit, en centièmes :

	OBSERVÉ	CALCULÉ POUR $\text{C}^5\text{H}^8\text{O}^2$
C. . .	59,85	60,00
H. . .	8,03	8,00
O. . .	32,12	32,00
	<hr/> 100,00	<hr/> 100,00

2° La densité de cette acétone à l'état liquide a été trouvée égale à  $d = 0,9811$  à  $17^\circ$ .

3° La détermination de la densité de vapeur fournit les nombres suivants :

Matière employée. . . . .	0 <sup>gr</sup> 0678
Hauteur barométrique corrigée. . . . .	758 <sup>mm</sup> 9

(1) A. COMBES, *Nouvelle réaction du chlorure d'aluminium* (Ann. de chimie et de physique, sér. 6, t. XII, p. 199)

Volume de l'air déplacé. . . . . 16<sup>cc</sup>4

Température à laquelle la lecture a été faite. 16°5

D'où  $D = 3,45$ .La densité théorique est  $D_{th} = 3,46$ .

4° Le point d'ébullition, pris sous la pression de 766<sup>mm</sup>, est de 140°; M. Claisen indique 139° sous la pression de 746<sup>mm</sup>.

### A. — Électrolyse de l'Acide Chlorhydrique.

L'étude de la chloruration de l'acétylacétone présente un double intérêt. Non seulement, en effet, il importe de voir si la méthode de préparation électrolytique des composés chlorés trouvera ici une nouvelle application; mais encore il est bon de rechercher quel dérivé chloré prendra naissance. On ne connaît jusqu'à ce jour qu'un petit nombre de produits de substitution du chlore à l'hydrogène dans l'acétylacétone. Ce sont, l'Acétylacétone hexachlorée ( $\text{CCl}_3\text{-CO-CH}^2\text{-CO-CCl}_3$ ) que A. Combes a tout d'abord préparée par l'action directe du chlore sur l'acétylacétone à chaud et au soleil; puis une acétylacétone monochlorée ( $\text{CH}_3\text{-CO-CHCl-CO-CH}_3$ . 3 Chlor. 2. 4 Pentandione) que ce même savant a obtenue au moyen du chlorure de sulfuryle, et enfin un dérivé dichloré.

Nos recherches ont été conduites comme les précédentes. L'acétylacétone, qui est très peu soluble dans l'eau pure, se mélange au contraire très facilement à l'eau acidulée par l'acide chlorhydrique. Cette propriété permet de faire varier la composition de l'électrolyte. Malgré cela, et quelles que soient les autres données du problème, on obtient toujours des résultats de même nature.

L'électrolyte, homogène au début de l'expérience, ne tarde pas à se diviser en deux phases liquides, la phase la plus dense étant constituée par le dérivé chloré. Si l'on distille ce produit brut, sous pression réduite, en présence ou non d'eau en excès, on arrive assez vite à reconnaître que ce corps peut être identifié avec le dérivé monochloré obtenu par A. Combes.

En effet, après quelques distillations fractionnées, nous avons obtenu un corps bouillant à 156-157°, sous la pression atmosphérique.

Deux dosages de chlore dans cette substance ont donné les résultats suivants :

I. Poids de matière . . . . .	0,3171 <sup>gr</sup>
Chlorure d'argent . . . . .	0,3427
II. Poids de matière . . . . .	0,2747
Chlorure d'argent . . . . .	0,2925

Soit, en centièmes :

Cl % OBSERVÉ		Cl % CALCULÉ POUR C <sup>5</sup> H <sup>7</sup> ClO <sup>2</sup>
I	II	
26,72	26,33	26,39

La détermination de la densité de vapeur conduit d'ailleurs aux mêmes résultats :

Matière employée . . . . .	0 <sup>gr</sup> 0834
Hauteur barométrique corrigée . . . . .	761 <sup>mm</sup> 4
Volume de l'air déplacé . . . . .	15 <sup>cc</sup> 5
Température à laquelle la lecture a été faite . . . . .	21°

D'où  $D = 4,59$

La densité théorique est  $D_{th} = 4,65$

Ces propriétés caractérisent donc le corps obtenu comme un dérivé monochloré de l'acétylacétone; et comme, d'autre part, son point d'ébullition concorde très sensiblement avec celui qui a été trouvé par A. Combes pour le dérivé 3 *Chlor. 2. 4 Pentandione*, nous croyons pouvoir admettre que l'électrolyse a au moins donné naissance à ce composé.

D'ailleurs, en traitant ce dérivé chloré par l'acétate de cuivre en solution concentrée, comme le recommande A. Combes (1), nous avons obtenu après lui le même composé cristallisé vert pâle dont la formule est (C<sup>5</sup>H<sup>6</sup>O<sup>2</sup>Cl)<sup>2</sup>Cu. Partant de ce dérivé cuivrique, nous avons pu régénérer l'acétylacétone monochlorée.

Dans l'étude que nous avons faite ensuite dans le but d'augmenter le rendement de la réaction, nous nous sommes particulièrement attaché à élucider l'influence de l'hydrogène naissant. Nous avons, à

(1) A. COMBES, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXI, p. 272-274.

cet effet, comparé des électrolyses faites en permettant ou non à l'hydrogène de réagir sur le dérivé chloré formé; et nous avons pu voir que, pour cette acétone comme pour celles déjà étudiées, l'hydrogène naissant ne diminuait nullement le rendement par réduction du produit formé.

L'emploi de la méthode d'Œtzel donne des résultats identiques ainsi que le montre le tableau suivant :

### Préparation de l'Acétylacétone monochlorée.

<i>Composition de l'électr. lyte.</i>	Acétylacétone . . . . .	50 cc
	Acide chlorhydrique . . . . .	50
	Eau. . . . .	25

Durée de l'électrolyse : 10 heures. — Température moyenne : 19°

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz tonnant.	Hydrogène	Hydrogène	Perte.
	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
8 "	2,26	45,4	30,3	30,2	0,1
8 30	2,26	46,0	30,7	30,7	0,0
9 "	2,32	48,7	32,5	32,5	0,0
9 30	2,32	48,4	32,3	31,9	0,4
10 "	2,32	47,4	31,6	31,5	0,1
1 30	2,10	45,6	30,4	30,4	0,0
2 "	2,10	46,8	31,2	31,1	0,1
2 30	2,10	45,9	30,6	30,5	0,1
3 "	2,25	47,7	31,8	31,9	— 0,1
3 30	2,16	46,7	31,2	31,4	— 0,2
4 "	2,20	47,3	31,6	31,7	— 0,1
4 30	2,20	48,6	32,4	32,3	— 0,1
5 "	2,10	47,6	31,8	31,9	— 0,1
5 30	2,20	47,5	31,7	31,4	0,3
6 "	2 "	44,7	29,8	29,4	0,4

Le produit obtenu dans cette électrolyse fut distillé sous pression réduite en présence d'eau et pesé. On trouva ainsi un dérivé chloré pesant 32<sup>gr</sup>0,34.

Une seconde électrolyse, mise dans le même circuit, avec une cloison poreuse, donna, toutes choses égales d'ailleurs, 38<sup>gr</sup>458. Il y a donc un avantage immédiat à employer un vase poreux. Il est à remarquer que, dans la première de ces deux électrolyses, une certaine quantité d'acétylacétone a été entraînée par l'hydrogène qui se dégagait. Cette

perte est suffisante pour permettre de comprendre d'où provient la différence de poids constatée.

Ces résultats sont comparables à ceux que nous ont donnés les autres acétones.

## B. — Électrolyse de l'Acide Bromhydrique.

De tous les dérivés bromés de l'acétylacétone que la théorie permet de prévoir, un seul, le dérivé hexabromé ( $\text{CBr}^3\text{-CO-CH}^3\text{-CO-CBr}^3$ ) a été préparé et étudié par A. Combes. Il faut probablement attribuer ce fait à la difficulté que l'on éprouve lorsque l'on veut obtenir à l'état pur les autres composés bromés. Il est en effet à remarquer que le brome agit très vivement sur l'acétylacétone en donnant naissance à divers produits de substitution et à de l'acide bromhydrique. Si l'on ne pousse pas la bromuration aussi loin que possible comme l'a fait A. Combes, on obtient toute une série de corps bromés qu'il est impossible de séparer par distillation fractionnée, car la chaleur les décompose. Aussi, ce savant a-t-il pu écrire : « *Les produits de l'action du brome sur l'acétylacétone moins avancés que l'hexabromure ne peuvent pas se distiller; ils ne paraissent jamais donner d'hydrates; leur séparation me paraît donc jusqu'à présent un problème insoluble.* »

Nous allons voir ici que la méthode électrolytique permet de préparer assez facilement une acétylacétone monobromée.

Il suffit pour cela de traiter, par un courant électrique, un mélange d'acétylacétone et d'acide bromhydrique plus ou moins concentré, et l'on voit se déposer au fond du récipient électrolytique une couche d'un liquide lourd, qui a, comme les acétones bromées déjà étudiées, une assez vive action sur les yeux. Après dessiccation et purification, ce corps nous est apparu comme étant une acétylacétone monobromée.

L'analyse donne en effet les résultats suivants :

	gr
I. Poids de matière. . . . .	0,3954
Bromure d'argent. . . . .	0,4141
II. Poids de matière. . . . .	0,404
Bromure d'argent. . . . .	0,4630

Soit, en centièmes :

Br %		Br %
OBSERVÉ		CALCULÉ POUR
I	II	C <sup>5</sup> H <sup>7</sup> BrO <sup>2</sup>
44,57	44,74	44,69

Nous avons, comme contrôle, essayé de déterminer la densité de vapeur de ce corps, mais nous avons toujours obtenu des nombres peu exacts, tenant vraisemblablement à ce que la substance étudiée se décompose plus ou moins complètement sous l'action de la chaleur. On trouve en effet une preuve de cette décomposition dans le fait que la petite ampoule contenant le liquide est, à la fin de l'expérience, tachée par une matière noire provenant évidemment de la décomposition du produit bromé par la chaleur.

D'après cela, il est hors de doute que nous avons pu obtenir un dérivé monobromé de l'acétylacétone. On pourrait admettre par analogie avec ce qui a lieu pour le dérivé monochloré étudié plus haut, que l'on a affaire au corps de formule (CH<sup>3</sup>-CO-CHBr-CO-CH<sup>3</sup>) (3 *Brom. 2,4 Pentandione*). Mais nous en avons trouvé une preuve en préparant avec l'acétate de cuivre un dérivé bromé de l'acétylacétone contenant du cuivre et répondant à la formule brute (C<sup>5</sup>H<sup>6</sup>O<sup>2</sup>Br)<sup>2</sup>Cu, comme le montrent les deux dosages suivants :

I. Poids de la matière. . . . . 0<sup>gr</sup>6555

CUIVRE % (observé).	CUIVRE % (calculé).
15,21	15,03

II. Poids de la matière. . . . . 0<sup>gr</sup>3509

BROME % (observé).	BROME % (calculé).
37,97	38,18

Dans ces conditions, la formule développée du dérivé bromé doit bien être celle que nous avons admise.

Les résultats que nous avons trouvés avec l'acétylacétone chlorée en étudiant l'influence de l'hydrogène naissant sur ce corps, permettent de prévoir ce qui va se produire dans le cas de l'acétylacétone bromée. Ce corps étant moins stable que le dérivé chloré, doit être plus sensible que lui à l'action de l'hydrogène naissant; aussi doit-on avoir des ren-



dements bien moindres lorsqu'on ne fait pas usage d'une cloison poreuse.

C'est ce que montrent les deux expériences suivantes :

Deux électrolyses mises en marche en même temps, mais en employant dans le premier cas une cloison poreuse, et dans le second cas en laissant à l'hydrogène la possibilité de réagir, ont donné après six heures de marche :

1 <sup>re</sup> Électrolyse. . .	24 <sup>gr</sup> 331 de produit brut.
2 <sup>e</sup> — . . .	5 <sup>gr</sup> 847 —

La méthode d'Oëttel, de son côté, conduit à des résultats de même nature, comme le montre le tableau suivant :

### Préparation de l'Acétylacétone monobromée.

<i>Composition de l'électrolyte.</i>	Acétylacétone . . . .	20 <sup>cc</sup>
	Acide bromhydrique .	25 <sup>cc</sup>
	Eau . . . . .	25 <sup>cc</sup>

Durée de l'électrolyse : 6 heures.

Heure de l'observation.	Intensité.	Gaz tonnant.	Hydrogène. (th.)	Hydrogène. (observ.)	Perte.
	amp.	cc.	cc.	cc.	cc.
1 30	1,75	42,0	28,0	25,1	2,9
2 »	1,72	42,9	28,6	17,5	11,1
2 30	1,75	48,1	32,1	15,3	16,8
3 »	1,67	45,5	30,4	10,0	20,3
3 30	1,70	44,5	29,7	7,6	22,1
4 »	1,70	47,2	31,5	7,5	24,0
4 30	1,70	45,5	30,4	7,8	22,5
5 »	1,75	45,1	30,1	7,4	22,7
5 30	1,70	42,6	28,4	6,7	21,7
6 »	1,70	46,3	30,9	7,3	23,6
6 30	1,85	43,3	28,9	7,4	21,5
7 »	1,75	43,4	29,0	7,2	21,8
7 30	1,75	43,8	29,2	7,2	22,0

### C. — Électrolyse de l'Acide iodhydrique et de l'Iodure de potassium.

L'électrolyse de l'acide iodhydrique en présence de l'acétylacétone ne nous a permis d'obtenir que de très faibles proportions d'acétone monoiodée.

Si, en effet, on soumet un mélange d'acétylacétone et d'acide iodhydrique convenablement étendu d'eau à l'action d'un courant électrique, on obtient au bout d'un certain temps un liquide lourd qui se rassemble à la partie inférieure du compartiment anodique. Ce corps est très fortement coloré en noir par de l'iode en excès, même si l'on prend la précaution de n'utiliser que des courants de faible intensité. Pendant l'électrolyse, la température doit être supérieure à 50°.

Le liquide noir ainsi préparé a été purifié en le faisant tomber goutte à goutte dans une solution saturée d'hyposulfite de sodium. La décoloration est presque totale et il est possible de séparer un liquide ambré qui est de l'acétylacétone monoiodée sensiblement pure. Si on laisse ce dérivé en présence de chlorure de calcium fondu, la dessiccation du produit se fait facilement, mais, en revanche, le liquide se colore par suite d'une décomposition lente sous l'action de la lumière. Aussi, tous les dosages d'iode que nous avons tentés, ont donné un léger excès d'iode par rapport à l'iode théorique.

	gr
Poids de matière. . . . .	0,4200
Iodure d'argent. . . . .	0,4441

Soit, en centièmes :

I % . . . . .	57,18
I % (calculé pour $C^5H^7IO^3$ ) . . . . .	56,19

Nous pouvons conclure de là qu'il s'est formé un dérivé monoiodé de l'acétylacétone; mais, vu le faible rendement de la réaction et l'instabilité du produit, il nous a été impossible de déterminer sa formule de constitution.

Remarquons, enfin, que ces mauvais résultats étaient à prévoir si l'on se rappelle que l'iode est sans action à froid sur l'acétylacétone, et que l'acide iodhydrique réduit ce même corps au voisinage de 100°.

Quant à l'électrolyse de l'iodure de potassium en présence d'acétylacétone dans le but d'obtenir de l'iodoforme, elle ne nous a donné que des résultats négatifs. A aucun moment nous n'avons observé la formation d'iodoforme. Ce fait peut paraître d'autant plus étonnant que l'acétylacétone jouit de la propriété de se dédoubler en acétone et acide acétique sous un certain nombre d'influences. Mais il ne faut pas oublier, d'autre part, que « quand un groupe  $CH^3$  est compris entre

*deux groupements CO ou CAz, les hydrogènes de ce chaînon CH<sup>2</sup> deviennent facilement remplaçables par un métal et jouent le rôle d'hydrogènes acides.* » Or, ce cas nous est fourni par l'acétylacétone qui se combine facilement à la potasse avec un assez grand dégagement de chaleur; et, bien que l'acétylacétonate de potassium traité par l'eau chaude ait tendance à se décomposer en acétone et acétate de potassium, il est possible de concevoir que la réaction actuelle ne donne pas naissance à l'iodoforme, mais plutôt à un dérivé iodé de l'acétylacétone ou de l'acétone, ce que semble d'ailleurs indiquer l'odeur piquante qui se dégage du voltamètre.

Quoi qu'il en soit, un fait reste bien établi, c'est que l'acétylacétone, en liqueur neutre ou alcaline, traitée par l'iode naissant, ne nous a jamais donné d'iodoforme comme les acétones précédemment étudiées. Nous nous proposons, d'ailleurs, de voir ultérieurement si les autres dicétones se comportent de la même façon.

## RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

Si maintenant, arrivé au terme de ce travail, nous jetons un coup d'œil d'ensemble sur les résultats que nous avons obtenus, nous trouvons qu'ils peuvent être résumés de la façon suivante :

1° L'électrolyse des trois acides chlorhydrique, bromhydrique et iodhydrique, en présence de l'acétone ordinaire, fournit une méthode simple et pratique de préparation des dérivés halogénés monosubstitués de cette acétone.

Les rendements sont très bons pour les dérivés chloré et bromé et sont au contraire faibles pour le dérivé monoiodé.

2° Cette méthode électrolytique, convenablement conduite, permet de préparer, à l'exclusion de tout autre corps, le dérivé monosubstitué, ce qui évite de longues et pénibles distillations fractionnées.

3° La distillation de ces corps, sous pression réduite et en présence d'eau, permet d'éviter une décomposition plus ou moins grande de ces corps par la chaleur, et donne en même temps la possibilité de déterminer la courbe des tensions de vapeur. Nous avons ainsi trouvé une nouvelle vérification de la loi des phases.

4° La méthode électrolytique précédente a été généralisée et étendue à quelques homologues supérieurs de l'acétone, savoir : la méthyl-éthylcétone, la méthylpropylcétone, la diéthylcétone, ainsi qu'à une dicétone : l'acétylacétone.

Les résultats ont été de même nature : ici encore nous n'avons obtenu que des dérivés monosubstitués ; toutefois il s'est formé dans divers cas des isomères qu'il ne nous a pas toujours été possible de caractériser nettement.

5° L'étude de l'action de l'hydrogène naissant sur ces composés nous a permis de voir que les dérivés bromés sont plus sensibles à l'action de l'hydrogène que les dérivés chlorés, et que, par suite, il faut

éviter de laisser ce gaz se dégager dans le compartiment où se produit la réaction de substitution.

L'action de la chaleur montre d'ailleurs que les dérivés chlorés sont plus stables que les dérivés bromés, qui le sont eux-mêmes plus que les dérivés iodés.

6° L'électrolyse de l'iodure de potassium en liqueur alcaline nous a en outre permis de préparer de l'iodoforme pur avec toutes les acétones précédemment étudiées, sauf l'acétylacétone.

7° La méthode de M. Duclaux pour le dosage des acides volatils, convenablement modifiée, nous a permis de reconnaître la nature des acides formés avec chacune de ces acétones, et par suite d'écrire la formule de la réaction dans ces différents cas.

Tels sont, rapidement résumés, les principaux résultats que nous avons obtenus par l'emploi de la méthode électrolytique. Assurément le problème complet de la substitution par voie électrolytique des halogènes à l'hydrogène dans les composés organiques est loin d'être résolu. Mais, tout incomplète qu'est cette étude, nous espérons qu'elle pourra être de quelque utilité.

Ajoutons enfin en terminant, que, à côté de l'intérêt immédiat de ces recherches, il en est un autre facile à concevoir : dans les composés que nous venons de préparer, le chlore, le brome ou l'iode, peuvent à leur tour être facilement remplacés par des groupements monovalents quelconques et par suite donner naissance à tout un ensemble de corps nouveaux. Nous avons déjà observé des réactions intéressantes en étudiant l'action de ces dérivés halogénés sur les amines aromatiques et nous espérons être bientôt en mesure de les publier.

## Note A.

### Distillation d'un mélange de monochloracétone et d'eau; tensions de vapeur de la monochloracétone.

La méthode que nous avons utilisée pour purifier la monochloracétone ordinaire et qui consiste à distiller ce produit en présence d'eau, sous pression réduite, nous a amené à faire quelques remarques intéressantes tant au point de vue pratique qu'au point de vue théorique.

Si l'on distille un mélange de monochloracétone pure et d'eau, il est facile de voir que, à une pression donnée, la composition du liquide mixte condensé est sensiblement la même quelle que soit la composition initiale du mélange. De plus, la température d'ébullition du mélange est constante. Ces faits, que la loi des phases nous permettait de prévoir, sont mis en évidence par les résultats suivants :

*Première expérience.* — Un mélange formé de 3 volumes de monochloracétone et de 1 volume d'eau distillé (monochloracétone 75<sup>cc</sup>, eau 25<sup>cc</sup>) est soumis à la distillation sous la pression de 360<sup>mm</sup> de mercure. La température de la vapeur mixte oscille entre 70°5 et 71°5. Le liquide recueilli est plus riche en eau que le mélange initial; ainsi, pour 49<sup>cc</sup> d'eau distillés, on a 34<sup>cc</sup>5 de monochloracétone et 14<sup>cc</sup>5 d'eau, alors que la composition initiale du mélange donne pour 49<sup>cc</sup>, 37<sup>cc</sup>7 de monochloracétone et 12<sup>cc</sup> 2 d'eau. Il en est résulté que lorsque 85<sup>cc</sup> du liquide mixte ont eu passé à la distillation, il n'y avait plus d'eau dans le ballon et la température s'élevait brusquement à 90°. En même temps, la masse avait tendance à noircir par suite de l'action de la chaleur sur la monochloracétone qui restait seule.

*Deuxième expérience.* — Dans un second essai, on a mélangé deux volumes de monochloracétone (60<sup>cc</sup>) avec un volume d'eau (30<sup>cc</sup>). La distillation s'est produite à 71° sous la pression de 362<sup>mm</sup> de mercure. Le liquide distillé avait la composition suivante :

Pour 50 <sup>cc</sup> distillés, on trouve 35 <sup>cc</sup> de monochloracétone et 15 <sup>cc</sup> d'eau ;			
Pour 81 <sup>cc</sup>	—	56 <sup>cc</sup>	— 25 <sup>cc</sup> —

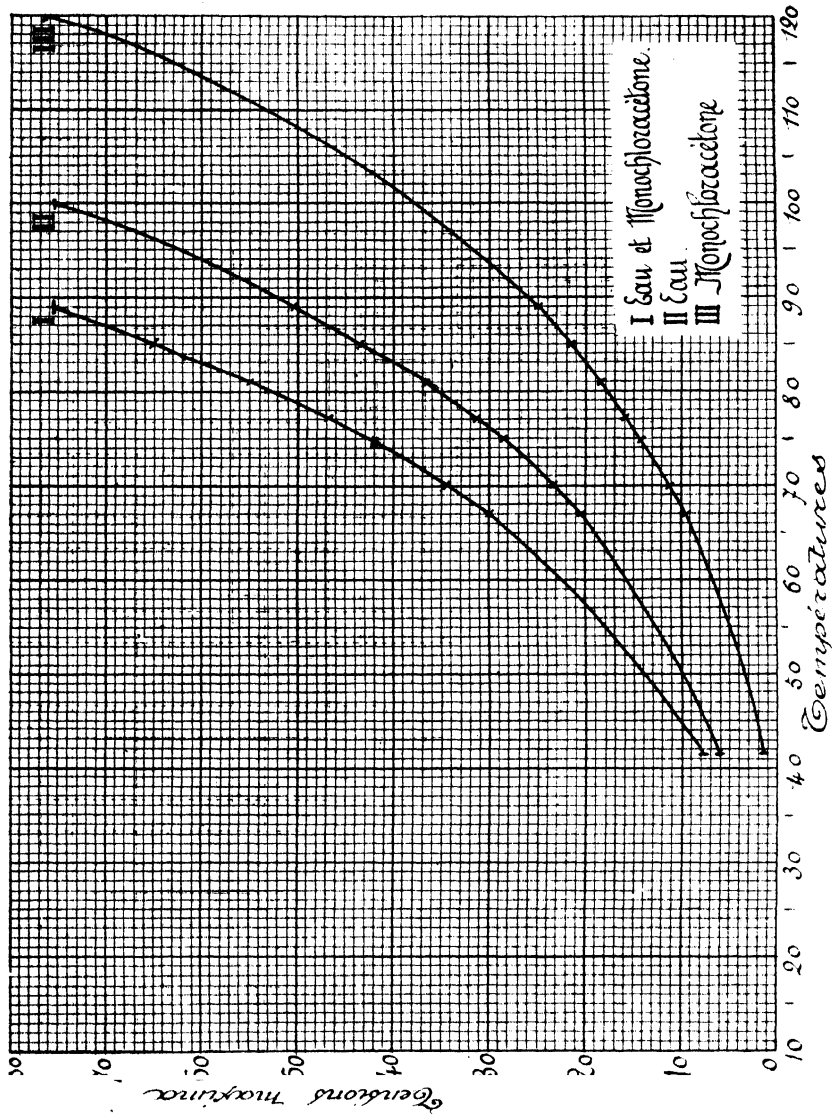
Dans ce cas, le liquide distillé est plus riche en monochloracétone que le mélange initial; de plus, le résidu liquide contenu dans le ballon est incolore et le ballon lui-même reste parfaitement propre, n'étant plus recouvert de ce produit noirâtre constaté dans les autres distillations.

*Troisième expérience.* — Une troisième expérience faite en prenant des volumes égaux de monochloracétone et d'eau conduit aux mêmes résultats.

Il en résulte que, à la pression considérée, quelle que soit la composition initiale du mélange, pour 100<sup>cc</sup> distillés, il y a 70<sup>cc</sup> de monochloracétone et 30<sup>cc</sup> d'eau. Cette teneur en eau (30 %) sera par suite, au point de vue pratique, celle au-dessous de laquelle il ne faudra pas descendre si l'on ne veut pas noircir le produit obtenu et avoir la monochloracétone parfaitement pure.

Remarquons, en outre, qu'il y a un accord parfait entre l'expérience et la théorie aussi bien quantitativement que qualitativement. C'est ainsi, par exemple, que ce rapport  $\frac{2}{3}$  que nous a fourni l'expérience pour la composition du liquide distillé à 70-71°, nous est donné aussi par la théorie.

En effet, l'expérience nous ayant appris que sous la pression de 348<sup>mm</sup>, le mélange monochloracétone et eau bout à 70°, il en résulte que les tensions respectives des deux vapeurs sont sensiblement 232<sup>mm</sup> et 116<sup>mm</sup>, c.-à.-d. sont entre elles comme les nombres 2 et 1. Par suite, un litre de vapeur mixte contient un litre de vapeur d'eau sous la pression  $\left(\frac{2}{3} \times 348\right)$  et un litre de vapeur de monochloracétone sous la pression  $\left(\frac{1}{3} \times 348\right)$  ou, ce qui est la même chose,  $\frac{2}{3}$  de litre de vapeur d'eau et  $\frac{1}{3}$  de vapeur de monochloracétone sous la pression de 348<sup>mm</sup>. Par suite, il distille 2 molécules d'eau pour une molécule





de monochloracétone, c'est-à-dire 92<sup>gr</sup>5 de monochloracétone pour  $2 \times 18^{\text{gr}}$  d'eau ou, en passant des poids aux volumes,  $\left(\frac{92,5}{1,1}\right)^{\text{cc}}$  de monochloracétone pour  $(2 \times 18)^{\text{cc}}$  d'eau. Ces nombres sont entre eux dans le rapport :  $\frac{92,5}{2 \times 1,1 \times 18} = \frac{7}{3}$  (sensiblement).

Enfin, nous avons fait un certain nombre de distillations du mélange monochloracétone et eau sous des pressions différentes. L'observation des températures d'ébullition et des pressions correspondantes nous a permis d'en déduire, à quelques millimètres près, des valeurs suffisamment approchées de la tension de vapeur de la monochloracétone aux différentes températures. Il suffit pour cela de retrancher de la valeur observée pour la pression correspondant à une température d'ébullition donnée, les nombres trouvés par Regnault pour la tension de la vapeur d'eau.

C'est en opérant ainsi que nous avons pu construire le tableau suivant :

Température d'ébullition du mélange.	Pression observée.	Tension maxima de vapeur d'eau.	Tension maxima de C <sup>2</sup> H <sup>3</sup> ClO.
	mm.	mm.	mm.
120°	»	»	768 (obs.)
89°	755	505	250 (calc.)
85°	650	433	217 »
81°	555	369	186 »
77°	474	313	161 »
75°	422	287	135 »
70°	348	232	116 »
67°	300	204	16 »
41°5	75	60	15 »

Si, prenant les nombres de ce tableau, nous cherchons à représenter graphiquement ces résultats, nous trouvons les trois courbes tracées ci-contre (p. 297).

La courbe I donne la loi de variation des tensions de vapeur du liquide mixte (monochloracétone et eau).

La courbe II est la courbe des tensions maxima de la vapeur d'eau telle qu'elle résulte des nombres de Regnault.

Enfin la courbe III donne les tensions de vapeur de la monochloracétone.

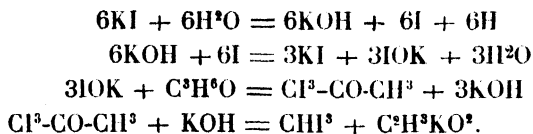
## Note B

Le présent travail était complètement rédigé lorsque parut dans le *Zeitschrift für Elektrochemie* (13 mai 1904) le résumé d'un intéressant travail de M. J.-E. Teeple <sup>(1)</sup>, ayant pour titre : *La préparation électrolytique de l'iodoforme au moyen de l'acétone*.

Nous ne relèverons dans ce mémoire qu'un certain nombre de points que viennent confirmer nos propres recherches et les observations que nous avons publiées il y a déjà plus d'un an <sup>(2)</sup>.

M. Teeple prépare l'iodoforme par l'électrolyse de l'iodure de potassium en se plaçant dans les meilleures conditions possible pour obtenir l'*acide hypoiodeux*. Les rendements obtenus par M. Teeple sont plus élevés que les nôtres, mais le *principe de la réaction est le même*.

En second lieu, M. Teeple croit devoir faire jouer un rôle à l'acétone triiodée qui servirait d'intermédiaire entre l'acide hypoiodeux et l'iodoforme, comme le montrent les formules suivantes :



Nous croyons qu'il est inutile de faire intervenir cette acétone triiodée et cela, d'autant mieux, que nous n'avons jamais constaté sa formation.

Enfin M. Teeple indique qu'il a obtenu des rendements atteignant 94,4 % en ajoutant de l'iode au fur et à mesure de l'augmentation de

<sup>(1)</sup> J.-E. TEEPLE, *The electrolytic Preparation of Iodoform from Acetone* (*Journ. amer. chem. Soc.*, février 1904, p. 170-177).

<sup>(2)</sup> A. RICHARD, *Extrait des procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 1901-02, p. 27, et 1902-03, p. 47.

l'alcalinité de l'électrolyte. Ce résultat, très important au point de vue pratique, a le défaut de nécessiter la préparation antérieure d'une quantité d'iode moitié de celle qui est mise en liberté par le courant. L'iodoforme préparé dans ces conditions n'est que *partiellement* de l'iodoforme électrolytique.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>P. DUHEM.</b> — Notice sur la vie et les travaux de Georges Brunel.	1
<b>G. BRUNEL.</b> — Sur les deux systèmes de triades de treize éléments. . . . .	1
<b>P. BARBARIN.</b> — Les cosegments et les volumes en géométrie non euclidienne . . . . .	25
<b>P. DUHEM.</b> — Notes sur quelques points des théories électriques et magnétiques. . . . .	45
<b>O. MANVILLE.</b> — Sur la déformation finie d'un milieu continu.	83
<b>P. BARBARIN.</b> — Calculs abrégés des sinus et cosinus circulaires ou hyperboliques. . . . .	163
<b>B. ÉLIE.</b> — Sur la détermination des paramètres canoniques des substitutions orthogonales à $n$ variables . . . . .	189
<b>A. RICHARD.</b> — Contribution à l'étude des dérivés halogénés des acétones de la série grasse . . . . .	203





**COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE**

**DE LA GIRONDE**

---

**OBSERVATIONS PLUVIOMÉTRIQUES  
ET THERMOMÉTRIQUES**

**de Juin 1902 à Mai 1903**

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

### Bureau.

*Président :* M. G. RAYET, directeur de l'Observatoire.  
*Vice-Présidents :* { M. BAYSELLANCE, ingénieur des Const. navales en retraite.  
                              { M. HAUTREUX, directeur des mouvem<sup>ts</sup> du port en retraite.  
*Secrétaire général :* M. LESPIAULT, doyen honoraire de la Faculté des Sciences.  
*Secrétaire :* M. DELASSASSEIGNE, inspecteur des Eaux et Forêts.

### Membres.

MM. BÉNARD, président de la Société d'Océanographie.  
CHAMINADE, inspecteur primaire à Blaye.  
CLAVEL, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, agent voyer en chef du département.  
DODEMAN, inspecteur primaire à La Réole.  
DROGUET, directeur des Postes et Télégraphes en retraite.  
DURAND, inspecteur d'Académie.  
FIGUIER, professeur honoraire de la Faculté de Médecine.  
GAYON, doyen de la Faculté des Sciences, directeur de la Station agronomique.  
GRUET, membre de la Chambre de Commerce.  
KAUFFMANN, ingénieur des Ponts et Chaussées.  
LORBLANCHER, inspecteur primaire à Bazas.  
MEUNIER, ingénieur des Ponts et Chaussées.  
MIGNÉ, inspecteur primaire à Bordeaux.  
PARANT, inspecteur primaire à Libourne.  
PELOUX, conservateur des Eaux et Forêts.  
POITRINAL, inspecteur primaire à Bordeaux.  
ROTGÈS, inspecteur primaire à Bordeaux.  
SAUCET, inspecteur primaire à Lesparre.  
VASSILLIÈRE, professeur départemental d'Agriculture.  
VIDAL, ingénieur en chef du Service maritime de la Gironde.

# OBSERVATIONS PLUVIOMÉTRIQUES

ET THERMOMÉTRIQUES

FAITES DANS LE DÉPARTEMENT DE LA GIRONDE

De Juin 1902 à Mai 1903.

NOTE DE M. G. RAYET

Président de la Commission météorologique départementale.

## I. — Observations pluviométriques.

L'année 1902-1903 est la première d'une troisième période de dix ans pendant lesquelles les observations udométriques de la Gironde auront été poursuivies suivant les mêmes méthodes d'observations et de publications, avec des instruments régulièrement construits et placés assez loin de tous les obstacles capables de gêner les mouvements de la pluie. Avec ces documents, rigoureusement exacts et comparables entre eux, j'ai étudié, cette année, le mode de distribution des pluies dans le bassin inférieur de la Garonne et de la Gironde et cette étude <sup>(1)</sup> est aujourd'hui dans les mains des membres du Conseil général et de la Commission météorologique.

La continuité et la précision des observations de la Gironde font le plus grand honneur aux collaborateurs de la Commission, dont plusieurs sont associés à ses travaux depuis plus de vingt ans ; elles sont dues aussi à la libéralité du Conseil général qui, en donnant chaque année une allocation importante à la Commission météorologique, lui permet de récompenser le plus grand nombre de ses aides et d'imprimer leurs obser-

. (1) G. RAYET, *Recherches sur la répartition moyenne des pluies dans le département de la Gironde* ; 2<sup>e</sup> Note, 1 broch. in-8°, Bordeaux, 1903.



vations. Les demandes de renseignements, de plus en plus fréquentes, qui sont adressées à la Commission par diverses administrations françaises ou étrangères sont la meilleure preuve de leur utilité et de leur mérite scientifique.

Les observations de la Gironde, centralisées chaque mois à l'Observatoire de Bordeaux, y sont minutieusement vérifiées.

Les stations pluviométriques étant nombreuses, parfois voisines, et la pluie elle-même étant, surtout en hiver, un phénomène plus général qu'on n'est souvent tenté de le croire, la comparaison des quantités d'eau recueillies dans des points peu éloignés et situés dans des conditions topographiques peu différentes permet de s'assurer que les relevés sont corrects, ne présentent pas de lacunes, et même que les instruments sont en bon état. Ce procédé de vérification nous a amené souvent à découvrir certaines irrégularités dans le service ou des défauts passagers dans les instruments.

Des visites d'inspection nous ont presque toujours montré la justesse de nos suppositions, et l'installation d'un pluviomètre nouveau a toujours facilement donné la mesure de la grandeur de l'anomalie signalée.

C'est ainsi que le nouveau pluviomètre de Lamothe-Landerron démontre que la très ancienne et très précieuse station de Col-de-Fer donne, depuis bien des années, 200 millimètres d'eau de moins qu'elle devrait en donner.

Nous venons de reconnaître de même que de l'eau est, depuis un an, souvent perdue dans le pluviomètre du Collège de Saint-André-de-Cubzac; un pluviomètre de contrôle vient d'être placé à la gare.

Les tableaux qui terminent cette note renferment les observations pluviométriques faites, à huit heures du matin, dans 39 stations de la Gironde; ils mettent en complète évidence le caractère général des pluies de la saison d'hiver, amenées par les vents de SW., ainsi que la localisation souvent très nette, des pluies d'été, conséquences de tourbillons orageux qui affec-

tent de préférence certaines régions et qui, dans la plupart des cas, ont des effets très limités. Ces mêmes tableaux font connaître tous les détails de la distribution des pluies entre le 1<sup>er</sup> juin 1902 et le 31 mai 1903.

Suivant la méthode adoptée dès 1871 par M. E. Belgrand, et déjà employée dans les rapports précédents, les observations sont publiées jour par jour. Les nécessités de l'impression ont obligé à ne donner ces observations journalières qu'au millimètre près, mais les totaux mensuels sont la somme exacte des quantités d'eau notées chaque fois au dixième de millimètre près et recueillies dans les pluviomètres de l'*Association scientifique*, pluviomètres dont la surface est de 4 décimètres carrés. Un zéro placé dans les tableaux signifie donc que l'udomètre a donné moins de un demi-millimètre d'eau.

Dans les pages suivantes, j'ai cherché à montrer, par une analyse rapide des phénomènes météorologiques généraux de l'Europe occidentale enregistrés dans le *Bulletin météorologique international*, à quelles causes on pouvait attribuer les principales périodes de beau temps ou de pluie comprises entre le 1<sup>er</sup> juin 1902 et le 31 mai 1903.

Le rapprochement de ces différents phénomènes montrera que l'étude des mouvements généraux du baromètre peuvent servir à une prévision de celles des perturbations atmosphériques de longue durée, qui constituent un véritable changement de temps.

*Été 1902.* La période orageuse de la fin de mai 1902 se termine, dès le 2 ou 3 juin, par une hausse barométrique sensible sur le nord de l'Europe qui fait tourner les vents au NW. et puis au N. et au NE.; le ciel se découvre alors et la température monte.

Le beau temps n'est d'ailleurs que passager; la dépression atmosphérique qui traverse la mer du Nord du 6 au 7 donne en Gascogne des averses assez abondantes. Les orages redeviennent nombreux et intenses dans la nuit du 10 au 11 (l'un d'eux donne 40<sup>mm</sup> d'eau à La Salie et 53<sup>mm</sup> à Pierroton), pour

ne cesser que vers le 16 ; la bourrasque du 12 juin est très profonde et ne s'éloigne que lentement.

Nouvelles pluies le 19, sous l'influence d'une dépression atmosphérique qui aborde le sud-ouest de la Manche.

Le temps reste ensuite variable ; jusqu'à la fin du mois, il n'y a à noter que les orages de la nuit du 27 au 28, amenés par une dépression atmosphérique qui existe à cette date au nord de l'Espagne et puis sur le golfe de Gascogne.

Les trois premières semaines de juin ont été froides et la température ne se relève guère qu'à partir du 23 ou du 24. Le nombre des jours de pluie n'excède pas la moyenne ; mais la quantité d'eau recueillie dépasse cependant de 30<sup>mm</sup> celle qui convient à ce mois.

Du 1<sup>er</sup> au 12 ou 13 juillet, la pression atmosphérique se maintient élevée dans l'ouest de l'Europe, et, parfois même, un anticyclone se forme sur la France. Les bourrasques sont ainsi éloignées de nos côtes, le ciel est assez beau et il y a absence de pluie jusqu'au 15.

A cette dernière date, une dépression barométrique se montre à l'ouest du golfe de Gascogne et il en résulte quelques pluies dans la vallée de la Garonne.

Le ciel s'éclaircit d'ailleurs bientôt et le temps n'est plus troublé que par les périodes orageuses du 20 au 25 juillet.

En résumé, la pluviosité de juillet est normale et le nombre des jours de pluie ne s'élève qu'à huit, ce qui donne à ce mois un aspect de sécheresse marqué.

Pendant la première quinzaine d'août, la situation atmosphérique générale de l'Europe se caractérise par des pressions assez élevées dans l'ouest et le nord-ouest ; les dépressions sont ainsi éloignées des côtes de France, mais cependant le ciel reste très nuageux ou couvert ; il fait en général assez froid.

Le 17 août, une bourrasque se montre en Irlande, mais est sans action bien notable sur le golfe de Gascogne ; la dépression

du 23 au 25 est aussi peu sensible dans le bassin de la Garonne.

La tempête du 29, dont le centre coupe la Manche, donne, au contraire, des pluies orageuses abondantes sur les côtes de la Gascogne.

Dans son ensemble, le mois d'août est sec et froid.

En résumé, l'été 1902 doit être considéré comme sec au point de vue du nombre des jours de pluie, mais les chutes d'eau ayant été abondantes, la pluviosité dépasse un peu la normale.

*Automne 1902.* — En septembre il y a eu trois périodes de pluies.

La première, celle du 3 au 6, est due au passage sur l'Ecosse du centre d'une bourrasque assez étendue, mais qui est bientôt chassée au nord-ouest sous l'influence d'une hausse barométrique en Espagne. Les vents tournent même au N. et au NE.

Le 9 et le 10, une dépression atmosphérique nouvelle se montre dans l'ouest de l'Europe et le ciel se couvre peu à peu, en même temps que tombent quelques grains. Du 10 au 13, toute une série de faibles bourrasques se produisent sur les côtes sud de Norvège et la Baltique; réunies entre elles, elles forment bientôt un ensemble tourbillonnant assez énergique, et il finit par pleuvoir dans la vallée de la Garonne.

A partir du 15, les lignes d'égales pressions barométriques se disposent comme des lignes de tempête d'hiver, mais les bourrasques restent assez éloignées de nos côtes.

La dépression atmosphérique du 22 aborde directement l'Irlande et donne les pluies du 23 au 26.

Le baromètre remonte ensuite rapidement en Angleterre; les vents tournent au N., et le mois se termine avec le beau temps, un anticyclone occupant une longue bande de terrain de l'Angleterre à la mer Noire.

En septembre, la pluviosité est normale et la température un peu basse; il y a surtout un refroidissement notable les derniers jours du mois, avec la rotation des vents au nord.

Pendant la première semaine d'octobre, une zone de haute pression existe sur la mer du Nord et la Baltique et des séries de dépressions atmosphériques se suivent sur l'Espagne et sur la Méditerranée. Dans la vallée de la Garonne, qui est sur la ligne de contact de ces deux courants, les vents soufflent du NE. et de faibles averses se produisent chaque jour. Du 8 au 12, une bourrasque plus définie se montre sur la Manche et se transporte enfin sur l'Adriatique; il pleut par des vents de SW. à NW., puis le vent tourne au N. et le ciel s'éclaircit pour un jour ou deux.

Le 15 octobre, la première tempête d'hiver, baromètre à 730<sup>mm</sup> dans son centre, aborde l'Irlande en se dirigeant lentement vers la Baltique. Son action s'étend à toutes les côtes de France et ne cesse que vers le 20.

A partir de cette date un anticyclone se forme d'abord sur le golfe de Gascogne, puis sur l'Europe centrale et le temps est en général assez beau. C'est la période du premier refroidissement annuel.

Malgré le nombre considérable de jours de pluie, 25, la quantité d'eau rassemblée aux pluviomètres est inférieure à la moyenne. La température est aussi inférieure d'environ 1° à celle qui convient à ce mois.

Les premiers jours de novembre sont beaux, avec baromètre élevé et temps un peu frais. Le 5, la situation change brusquement sous l'influence d'une assez forte dépression atmosphérique qui aborde les côtes ouest de l'Irlande, et est ralentie dans sa marche à l'est par les hautes pressions qui existent sur la Baltique; elle semble disparaître le 6 sur la Méditerranée. Dès le 7, une bourrasque (730<sup>mm</sup>) se montre au nord-ouest de l'Irlande, étend son action jusqu'au golfe de Gascogne et ne disparaît que le 10 sur la Baltique.

C'est aux tempêtes des 5 et 7 que sont dues les pluies du 5 au 10.

La bourrasque du 11 passe au-dessus de la mer du Nord et

en même temps un anticyclone se forme sur la Russie pour gagner bientôt la mer du Nord et la Baltique.

En France, le vent tourne alors au N., le ciel s'éclaircit, les minima de la température s'abaissent et il gèle fortement du 17 au 20.

A partir du 22, le baromètre baisse régulièrement dans l'ouest de l'Europe et une violente tempête aborde l'Irlande le 24. Les jours suivants elle descend vers la Manche, puis son centre traverse la France, se dirigeant vers la Méditerranée. Le 27, une nouvelle bourrasque, moins intense que la précédente, suit à peu près le même chemin, et sur la Garonne il pleut avec des vents de SE.

La température moyenne de novembre est presque normale, mais la pluviosité est grande.

En résumé, la pluviosité de l'automne est moyenne.

*Hiver 1902-1903.* — Une tempête, qui est de la famille de celles de fin novembre, souffle encore sur nos côtes pendant les premiers jours de décembre, et il pleut jusqu'au 4.

Depuis plusieurs jours déjà un anticyclone se montre d'ailleurs sur le golfe de Bothnie, la Baltique, puis la mer du Nord et l'Angleterre; dès le 4 décembre, le vent a, en France, tourné au N. et au NE. et le ciel s'éclaircit en même temps que les minima s'abaissent rapidement au-dessous de zéro; il gèle chaque matin jusqu'au 8 et le temps est beau jusqu'au 12.

Le baromètre commence alors à baisser dans l'ouest de l'Europe; le vent tourne au SE. et au SW. sur le golfe de Gascogne et la tempête du 13 au 17 donne des vents très forts sur la Manche avec pluies dans le bassin de la Garonne.

Cette bourrasque est suivie d'une hausse barométrique rapide dans l'ouest et le ciel est peu pluvieux jusqu'au 25.

A cette dernière date, les dépressions barométriques se montrent de nouveau dans le nord de l'Europe et puis se rapprochent des côtes du golfe de Gascogne, en entourant peu à

peu l'anticyclone qui existe sur l'Espagne; il pleut alors chaque jour dans la vallée de la Garonne. La plus remarquable de ces bourrasques est celle du 29 décembre, au centre de laquelle le baromètre est descendu à 720<sup>mm</sup>.

En décembre, la température moyenne est normale et la quantité d'eau rassemblée dans les pluviomètres est voisine des deux tiers de la quantité normale.

Du 1<sup>er</sup> au 4 et du 4 au 7 janvier, deux bourrasques successives traversent le nord de l'Europe, et la première surtout se signale par des pluies assez abondantes sur le golfe de Gascogne. Il y a ensuite une hausse barométrique assez sensible dans l'ouest, une rotation des vents vers le N. et un beau temps relatif. Après la bourrasque du 11 au 13, un anticyclone se forme sur le nord de l'Europe et le temps est beau jusqu'au 17.

Une tempête se montre alors à l'ouest de l'Angleterre et remonte lentement au nord, sans pouvoir entamer les hautes pressions qui existent en Russie. Il en est de même pour les bourrasques du 20 au 23 et du 24 au 27. Ces dépressions intéressent peu le golfe de Gascogne.

Le temps est beau jusqu'à la fin du mois, sous l'influence de hautes pressions dans l'ouest de l'Europe.

Janvier est peu pluvieux; il y a eu deux périodes de froid : la première du 12 au 16, la seconde du 26 à la fin du mois.

Le mois de février débute par une bourrasque qui traverse l'Angleterre en se dirigeant vers les côtes de Norvège et qui est immédiatement suivie de l'apparition d'un anticyclone en Irlande et en Espagne. Les vents tournent alors au N. et au NE., le ciel s'éclaircit en même temps que la température s'abaisse. Les tempêtes qui se succèdent alors à la latitude de l'Ecosse ou du golfe de Bothnie sont sans action sur le golfe de Gascogne, et si le ciel n'est pas tout à fait beau, les averses sont faibles et intermittentes.

Dans la dernière semaine de février, la trajectoire des bour-

rasques se rapproche cependant de la Manche, le vent tourne à l'W. et le ciel se couvre. Le véritable changement de temps ne se produit d'ailleurs que le dernier jour du mois.

A cause du beau temps et des longues journées de soleil, la température moyenne de février dépasse la moyenne de près de un degré et la quantité d'eau tombée n'atteint pas le tiers de la pluie normale.

En résumé, l'hiver 1902-1903 est doux et surtout sec.

*Printemps 1903.* — En mars, le temps est relativement assez beau et il n'y a guère que deux périodes de pluies abondantes, du 1<sup>er</sup> au 8 et du 25 au 28.

Pendant la première décade, l'anticyclone de février continue à se montrer sur l'Espagne et des dépressions atmosphériques passent au nord de l'Ecosse, se dirigeant à l'est; parmi les plus intenses, il faut citer celle du 2 au 4 mars, qui ne monte que péniblement vers le golfe de Bothnie où elle disparaît le 7.

Pendant ces derniers jours, l'anticyclone des Açores et de l'Espagne finit par gagner le nord de l'Europe et, le vent ayant remonté jusqu'au N., le ciel s'éclaircit en Europe, la température s'abaisse. La bourrasque du 14 au 15 est sans grande action sur nos côtes; celle du 17 au 18 a plus d'importance: cependant elle ne fournit que peu de pluie.

La bourrasque du 19 passe au nord de l'Ecosse; celle du 22 reste encore très loin du golfe de Gascogne, mais la vallée de la Garonne est atteinte par la tempête des 25, 26 et 27.

Le 29, nouvelle bourrasque sur la mer du nord, mais le baromètre monte rapidement en Espagne et le mauvais temps cesse.

Le mois de mars est chaud, surtout dans la seconde partie, pendant les pluies amenées par les vents d'W. L'eau mesurée au pluviomètre est en quantité normale.

Pendant les premiers jours d'avril, des bourrasques continuent à se montrer au nord de l'Europe, mais le baromètre



monte lentement dans l'ouest, la trajectoire des dépressions traverse bientôt l'Europe du nord au sud, de la mer du Nord à l'Adriatique, et un anticyclone se formant sur la Manche, le ciel s'éclaircit et devient beau. En même temps, la température s'abaisse, et dans la Gironde on conservera longtemps le souvenir des gelées qui, du 16 au 19, ont fait grand mal dans les vignes, dont la végétation était un peu avancée.

Le 21 avril, une bourrasque imprévue se montre sur le golfe de Gascogne et l'Angleterre, traverse la France et se perd en Allemagne et sur la Baltique. La température s'est alors rapidement relevée et les pluies commencent dès le 20; elles s'accroissent ensuite par l'action de la dépression du 27, qui prend peu à peu l'étendue d'une tempête d'hiver.

Une nouvelle série de mauvais temps commence le 29.

Le mois d'avril est très froid (sa température est de 2° au-dessous de la normale) et aussi assez sec.

Pendant toute la première quinzaine de mai, la situation atmosphérique générale est caractérisée par d'assez basses pressions dans l'ouest et le centre de l'Europe, et cette zone est traversée par une série de bourrasques de peu ou de très peu d'importance, cheminant de l'ouest à l'est et donnant tous les jours un petit nombre de millimètres d'eau. A partir du 13, le baromètre éprouve une hausse assez rapide dans le sud-ouest de l'Europe et un anticyclone se forme peu à peu sur l'Espagne. Le vent tourne alors au NW. et au N. et le ciel devient nuageux, puis beau.

Le calme atmosphérique persiste ainsi jusqu'au 25 ou 26, époque à laquelle un anticyclone se forme sur la mer du Nord et la Baltique, tandis que la trajectoire des bourrasques s'établit au travers de l'Espagne. Il pleut alors, d'abord par des vents de SE., puis par des vents de S. et de SW., à la suite de la tempête du 30 mai, qui reprend le chemin normal de la Manche et de la mer du Nord.

Le mois de mai est un peu chaud et sa pluviosité normale.

Le printemps a reçu sa quantité moyenne de pluie dans un nombre de jours qui est identiquement égal à celui des vingt années précédentes. Si le mois d'avril a été anormalement froid, mars et mai ont été très doux et la compensation thermométrique se fait très exactement.

La période de juin 1902 à mai 1903, dont je viens de retracer brièvement l'histoire météorologique, est singulière par les froids de l'été et de l'automne, puis par la grande chaleur des mois ordinairement froids, puis après des mois de janvier, février et mars très chauds, il y a, au milieu d'avril, un retour remarquable des vents au N. et une période également remarquable de gelées tardives.

La pluviosité de l'année est d'ailleurs normale.

Ces résultats, indiqués dans les résumés précédents, seront plus complètement mis en évidence par les tableaux qui vont suivre.

Le premier est la comparaison du nombre des jours de pluie à Floirac, des divers mois et des saisons, avec le résultat moyen des vingt et une années de 1880 à 1900.

NOMBRE MOYEN DES JOURS DE PLUIE		NOMBRE DES JOURS DE PLUIE en 1902-1903	
Juin.....	16	16	
Juillet.....	13	8	37
Août.....	13	13	
Septembre...	15	15	
Octobre.....	19	25	62
Novembre....	20	22	
Décembre....	22	22	
Janvier.....	20	15	49
Février.....	16	12	
Mars.....	16	18	
Avril.....	18	14	51
Mai.....	17	19	
	205	199	

Le nombre des jours de pluie est très peu inférieur à la moyenne : faible en juillet, il est considérable en octobre et, de nouveau, faible en janvier et février.

Dans le tableau précédent on a, suivant la règle absolue adoptée par les météorologistes, compté comme jours de pluie tous ceux où le pluviomètre de l'Observatoire a indiqué une quantité d'eau quelconque mesurable. Quelquefois, en hiver surtout, cette eau provient simplement d'un dépôt de rosée ou de la condensation du brouillard. Si l'on ne comptait comme jours de pluie que ceux où de la pluie est réellement tombée des nuages, on arriverait à des résultats sensiblement moindres. Dans l'hiver 1902-1903, le nombre de jours de brouillard a été assez grand et le nombre de jours de pluie se trouve augmenté d'autant.

Pour le plus grand nombre des stations de la Gironde, les différences de quantités de pluie données par deux instruments voisins sont dans un sens qu'expliquent, avec quelque réflexion, les conditions de topographies générales. Pour quelques autres, c'est dans l'intervention de phénomènes locaux qu'il faut chercher, et que l'on trouve, l'explication de l'anomalie constatée. En conservant pour une discussion spéciale, le soin de ces explications, je citerai seulement ici, pour les seules stations du département, les anomalies de Saint-Nicolas et de Grand-Mont.

L'irrégularité des observations de Col-de-Fer a disparu avec l'installation d'un pluviomètre à Lamothe-Landerron. Il ne reste qu'à poursuivre ces deux séries d'observations assez longtemps pour déterminer le coefficient de correction de Col-de-Fer, coefficient qui permettra l'utilisation de toute la série ancienne.

Le tableau suivant résume, par saisons et pour l'année entière, les observations pluviométriques de la Gironde ; il montre que chaque saison a reçu, en somme, les quantités de pluie normales. L'hiver seul doit être considéré comme sec.

# RÉSUMÉ DES OBSERVATIONS PLUVIOMÉTRIQUES DE LA GIRONDE

de Juin 1902 à Mai 1903.

STATIONS	OBSERVATEURS	ÉTÉ 1902	AUTOMNE 1902	HIVER 1902-1903	PRINTEM. 1903	ANNÉE
		mm	mm	mm	mm	mm
La Coubre.	Les guetteurs du sémaphore	109,4	177,4	118,3	140,0	545,1
Phare de Grave.	M. Magnin, chef gardien ..	139,4	227,9	145,8	193,5	706,6
Saint-Nicolas.	M. Peyruse, brig. forestier	122,2	213,4	113,3	171,1	620,0
Grand-Mont.	M. Ducourret, brig. forest.	173,9	267,8	135,2	218,8	795,7
Phare d'Hourtin.	M. Martin, chef gardien...	125,2	238,6	137,8	173,5	675,1
Mouthic.	M. Darrigade, garde forest.	114,7	250,2	156,1	178,6	699,6
Gressier.	M. Papinot, garde forest...	135,7	225,1	151,9	187,4	700,1
Le Porge.	M. Gassian, instituteur...	176,4	245,1	155,6	189,7	766,8
Arès.	La Mère Supr <sup>e</sup> de la Maison de sante.	145,5	274,0	172,4	177,6	769,5
Piquey.	M. Laho de, brig. forestier.	129,2	263,9	158,1	181,6	742,8
Arcachon.	M. Claveranne, jardin <sup>r</sup> du Casino	161,2	216,6	164,8	178,8	821,4
Audenge.	M. Gassian, instit. en retraite	177,8	314,9	154,0	212,5	859,2
Cazaux.	M. Castéra, propriétaire...	165,6	312,0	156,0	156,9	790,5
La Salie.	M. Bosq, garde forestier...	155,0	330,8	156,3	183,6	825,7
Château-Loudenne.	M. Hucks, régisseur.....	138,4	203,3	92,6	129,4	563,7
Château-Lafite.	M. Bugat, régisseur.....	190,3	244,9	127,8	189,7	752,7
Saint-Julien.	M. Cougouille, instituteur.	157,5	240,2	109,2	178,1	685,0
Sainte-Hélène.	M. Gouille, instituteur...	161,9	236,7	148,7	190,6	737,9
Pierroton.	M. Taxis, homme d'affaires.	218,1	295,4	144,1	230,5	888,1
Belin.	M. Rozie, greffier de la just. de paix.	168,0	307,6	128,2	198,9	802,7
Cavignac.	M. Jayle, pharmacien.....	183,9	240,4	96,0	177,1	697,4
St-André-de-Cubzac.	M. Ménard, super. du Collège...	189,9	219,8	12,3	139,1	561,1
Sallebeuf.	M. Edouard Eiffel.....	187,1	218,3	117,5	185,0	707,9
Floirac (Observat <sup>r</sup> ).	Observatoire astronomique.	188,8	227,2	93,3	166,6	675,9
Bordeaux (dir. des Eaux)	MM. les mécaniciens.....	176,1	246,5	121,7	155,5	699,8
Talence.	M. Mauriceau, chef de cult.	169,3	257,3	132,0	175,5	734,1
La Sauve.	Ecole normale.....	204,0	228,3	80,9	131,2	644,4
Château d'Yquem.	M. Lafon, maître de chai...	222,2	227,1	97,2	175,7	722,2
Budos.	M. Lacoste, garde des sources.	179,6	239,8	90,8	183,2	693,4
Les Églisottes.	M. Bodin, instituteur.....	182,1	231,0	95,5	174,7	683,1
Lussac.	M. Serre, instituteur.....	189,7	224,6	94,0	143,7	652,0
Saint-Émilien.	M. Quantin, homm. d'aff...	210,2	233,1	101,5	139,0	683,8
Sauveterre.	M. Lagarde, instituteur...	196,0	278,0	90,0	168,2	732,2
Col-de-Fer.	Service des Ponts et Chauss.	137,2	171,5	62,0	121,6	492,3
Lamothe-Landerron.	M. Groussot, instituteur...	180,4	220,6	89,4	192,5	682,9
Grignols.	M. Duprat, instituteur....	176,5	229,8	80,8	172,3	659,4
Captieux.	M. Coutures, instituteur...	171,9	228,2	103,5	175,6	679,2
St-Antoine-sur-l'Isle.	M. Denis, instituteur.....	179,3	208,9	73,0	158,0	619,2
St-Avit-du-Moiron.	M. Pagès, chef d'antennier.	205,2	206,9	71,1	182,3	665,5

A la suite de ce tableau, je placerai le résumé, par saisons, des observations de la Charente, de la Charente-Inférieure, des Landes et des Basses-Pyrénées. Je suis redevable de ces observations à MM. les Ingénieurs en chef de ces départements ou à nos collègues des Commissions météorologiques. Qu'ils veuillent bien recevoir ici l'expression des remercie-

ments de la Commission météorologique pour l'envoi d'observations très utiles à notre discussion et au tracé des courbes d'égaies quantités de pluie.

RÉSUMÉ DES OBSERVATIONS PLUVIOMÉTRIQUES FAITES DANS LA CHARENTE,  
LA CHARENTE-INFÉRIEURE, LES LANDES ET LES BASSES-PYRÉNÉES.

(Juin 1902 à Mai 1903.)

STATIONS	ÉTÉ 1902	AUTOMNE 1902	HIVER 1902-1903	PRINTEMPS 1903	ANNÉE
<b>Charente.</b>	mm	mm	mm	mm	mm
Ruffec .....	161,3	206,0	144,7	155,7	667,7
Confolens .....	185,5	253,6	103,0	222,8	764,9
Champagne-Mout. ....	206,8	267,2	104,6	186,5	765,1
Aigre .....	142,5	224,2	122,0	169,4	658,1
Chabanais .....	166,1	263,3	121,3	208,6	759,3
Rouillac .....	176,6	301,3	164,2	155,6	797,7
Les Rascats .....	184,5	283,6	120,5	178,4	767,0
Cognac .....	130,3	181,1	100,7	127,8	539,9
Montbron .....	147,2	283,9	96,7	221,0	748,8
Angoulême (stat. princ.)	217,9	218,7	93,7	136,9	667,2
Angoulême (poudrière).	184,1	231,1	91,3	155,0	661,5
Barbezieux .....	192,5	222,1	98,8	162,9	676,3
Blanzaguet .....	189,5	198,6	72,9	134,1	595,1
Chalais .....	187,6	218,8	77,8	184,8	669,0
<b>Charente-Inférieure.</b>					
Chassiron (sémaphore).	96,2	199,4	90,2	147,8	533,6
Royan .....	111,0	147,0	88,0	154,0	500,0
Montguyon .....	181,0	232,0	79,0	170,0	662,0
Saintes .....	155,0	168,0	102,0	131,0	556,0
La Rochelle .....	115,0	182,0	109,0	172,0	578,0
Bernouet .....	94,0	134,0	98,0	127,0	453,0
Bel-Ebat .....	115,0	181,0	103,0	138,0	537,0
Jonzac .....	196,0	207,0	77,0	170,0	650,0
<b>Landes.</b>					
Pissos .....	217,8	319,3	132,9	218,0	888,0
Roquefort .....	192,2	170,0	96,4	215,7	674,3
Mont-de-Marsan .....	215,1	262,6	143,3	216,9	837,9
Tartas .....	217,7	336,1	216,0	241,7	1011,5
Saint-Sever .....	209,6	348,6	135,7	190,5	884,4
Dax .....	198,9	304,4	239,5	257,8	1000,6
Aire .....	158,9	244,2	96,0	230,8	729,9
Peyrehorade .....	199,8	328,7	255,4	155,2	939,1
<b>Basses-Pyrénées.</b>					
Biarritz (sémaphore).	199,5	320,6	258,7	244,4	1023,2

Les observations résumées dans les pages qui précèdent montrent que la distribution des pluies de 1902-1903 est anormale; à un mois très sec succède un mois très humide; les périodes de sécheresse ou d'humidité sont courtes et ne dépassent presque jamais un mois.

Dans son ensemble, l'année est d'ailleurs sèche, la quantité d'eau mesurée aux udomètres étant de 676<sup>mm</sup> au lieu de 759<sup>mm</sup>.

# COMPARAISON

de la quantité de pluie tombée à l'Observatoire de Bordeaux (Floirac)  
en 1902-1903 avec la quantité normale.

ANNÉE	MOIS	MOYENNE MENSUELLE 1880 à 1900	ANNÉE 1902-1903 (FLOIRAC)	Rapport de 1902-1903 à la normale	JOURS de pluie.
		mm	mm		
1902	Juin . . . .	74,6	103,6	1,39	16
—	Juillet. . . .	47,3	45,9	0,97	8
—	Août . . . .	46,9	39,3	0,84	13
—	Septembre	59,7	62,9	1,05	15
—	Octobre ..	96,6	64,4	0,67	25
—	Novembre.	73,8	99,9	1,35	22
—	Décembre.	71,1	46,7	0,66	22
1903	Janvier. . .	51,4	32,1	0,62	15
—	Février. . .	49,3	14,5	0,30	12
—	Mars. . . . .	48,6	50,0	1,03	18
—	Avril. . . . .	71,0	49,2	0,69	14
—	Mai. . . . .	68,4	67,4	0,99	19
	Été . . . . .	168,8	188,8	1,12	37
	Automne. .	230,1	227,2	0,99	62
	Hiver . . . .	171,8	93,3	0,54	49
	Printemps	188,0	166,6	0,89	51
	ANNÉE.	758,7	675,9	0,89	199

Les nombres de la page 15, et quelques-uns des résultats des observations de la Charente, de la Charente-Inférieure et des Landes, ont servi à tracer les courbes d'égales quantités de pluie de la carte ci-jointe. Ces courbes conservent toujours une forme voisine de celles à laquelle conduit la moyenne de plusieurs années, malgré l'effet produit par quelques orages de la saison chaude. Les pluies d'orages, qui donnent parfois, en un très petit nombre d'heures, des quantités d'eau supérieu-

res à 50<sup>mm</sup>, ne disparaissent pas dans un total annuel de 700 à 800<sup>mm</sup>, et elles disparaissent d'autant moins qu'il y a dans la Gironde des lignes de parcours préférées par les grands orages.

Le mode de distribution des pluies en 1902-1903 confirme, d'ailleurs, les conclusions générales des années précédentes :

1° Dans la partie de la Gironde comprise entre le fleuve et l'Océan, la quantité de pluie croît du nord au sud et cette croissance se prolonge jusqu'aux Pyrénées ;

2° Il y a un maximum de pluie un peu à l'est de la ligne des étangs du littoral ;

3° Un minimum relatif existe probablement sur les rives de la Garonne et de la Gironde ;

4° Enfin, la partie supérieure de la vallée de l'Isle est aussi une région sèche bien marquée.

La chaîne des dunes paraît toujours accumuler la pluie dans les stations qu'elle protège directement des grands vents de l'Océan, comme si son relief et la résistance que les parties boisées opposent au mouvement de l'air obligeaient les nuages à déverser en un même point une plus grande quantité d'eau. C'est ce qui résulte encore cette année de la comparaison suivante des observations faites dans des stations dont les latitudes sont peu différentes et qui sont voisines.

QUANTITÉ D'EAU RECUEILLIE EN 1902-1903			
SUR LES BORDS DE L'OcéAN		EN ARRIÈRE DES DUNES	
	mm		mm
Saint-Nicolas.....	620,0	Grand-Mont.....	795,7
Phare d'Hourtin.....	675,1	Moutchic.....	699,6
Gressier.....	700,1	Le Porge.....	766,8
La Salie.....	825,7	Cazaux.....	790,5
Moyenne...	705,2	Moyenne...	763,2

Il est donc tombé 58<sup>mm</sup> de plus de pluie derrière les dunes que sur les bords mêmes de l'Océan. L'excès de pluie de La Salie sur Cazaux est dû à l'orage du 10 juin 1902.

## II. — Observations thermométriques.

Les observations thermométriques ont été, pendant l'année 1902-1903, régulièrement faites dans les treize stations anciennes de : Phare de Grave, Château-Loudenne, Château-Lafite, Sainte-Hélène, Le Porge, Arès, Arcachon, Bordeaux, Floirac, Lussac, Saint-Émilion, Château-d'Yquem et Budos.

Il n'y a pas eu cette année de changement de personnes parmi les collaborateurs de ces stations, et les relevés des minima et maxima thermométriques y ont été faits avec beaucoup d'exactitude.

Une lacune regrettable est encore à signaler dans la série thermométrique du jardin botanique de la Faculté de Médecine à Talence. En juin 1902, le maximum ayant souvent été dérangé par des personnes étrangères au service, les indications de cet instrument se sont ainsi trouvées faussées et inutilisables. Depuis cette époque, les instruments ont été enveloppés d'une clôture en toile métallique et soustraits à la curiosité trop directe des élèves et du public ; les observations sont correctement faites par M. Mauriceau, chef de culture.

Aux observations ordinaires des années précédentes, j'ai pu, grâce à la complaisance de M. Édouard Eiffel, joindre les résumés des températures minima et maxima obtenues dans sa propriété de Vacquey (commune de Salleboeuf). C'est un très utile complément aux observations du centre de l'Entre-deux-Mers.

Les nombres qui sont publiés dans les derniers tableaux de ce rapport sont exacts et peuvent être utilisés avec confiance pour des études de climatologie régionale ou d'agriculture.

Ces tableaux montrent très nettement que, dans les diverses régions de la Gironde, la température obéit aux mêmes influences et qu'il n'y a guère de différences entre les nombres obtenus que celles qui s'expliquent par la topographie locale du pays.

Je rassemblerai ici les moyennes mensuelles des minima et des maxima de chaque station.



## TEMPÉRATURES MOYENNES MINIMA ET MAXIMA

Année	Mois	PHARE de GRAVE		CHATEAU-LONGUEUR		CHATEAU-LAFITE		St-HÉLÈNE		LE FORGE		ARÈS		ARCACHON		TALENCE	
		Minima	Maxima	Minima	Maxima	Minima	Maxima	Minima	Maxima	Minima	Maxima	Minima	Maxima	Minima	Maxima	Minima	Maxima
1902	Juin .....	12,5	21,8	12,0	21,7	11,4	22,8	10,2	23,3	10,1	23,0	10,9	23,1	13,1	23,5	10,2	»
—	Juillet ....	15,7	25,6	16,0	26,2	14,8	26,7	14,5	27,6	13,3	27,4	14,1	27,7	15,4	26,5	14,6	27,7
—	Août .....	14,8	25,0	14,7	25,5	13,3	25,6	11,6	26,8	11,9	26,3	12,3	27,0	14,5	25,0	12,7	27,4
—	Septembre.	13,6	22,5	13,5	21,8	12,2	21,5	12,7	23,5	10,3	23,0	12,0	23,5	13,0	22,2	11,4	23,7
—	Octobre ...	9,2	17,2	8,6	16,6	6,7	15,7	5,8	17,5	5,9	17,8	6,0	17,6	7,9	16,4	5,8	17,6
—	Novembre..	6,6	13,0	6,8	12,8	5,3	11,8	4,8	13,4	4,7	13,9	4,8	14,0	5,4	12,7	3,9	13,1
—	Décembre..	4,0	9,7	3,9	9,1	2,9	8,8	2,2	9,7	2,0	10,4	2,0	10,2	3,1	9,2	1,9	9,2
1903	Janvier....	3,4	10,0	3,2	9,6	1,8	8,5	1,7	10,9	0,8	12,1	1,3	11,2	1,4	10,2	0,9	10,3
—	Février....	3,4	12,2	3,5	13,0	1,5	11,8	0,7	13,5	0,1	14,7	-0,3	14,2	2,5	12,4	-0,0	13,9
—	Mars .....	5,4	14,8	5,5	15,4	4,1	14,5	3,7	16,0	3,1	16,0	3,9	16,3	4,6	15,3	3,5	16,4
—	Avril .....	5,6	15,3	5,7	14,9	4,0	14,6	2,8	15,7	2,0	15,3	3,1	16,1	4,9	15,0	3,1	16,4
—	Mai .....	10,4	20,3	10,6	21,0	9,7	20,9	8,7	21,7	8,1	21,5	9,4	21,8	10,2	20,4	8,8	22,1
	Moyenne.	8,73	17,28	8,67	17,30	7,31	16,93	6,62	18,30	6,03	18,45	6,63	18,56	8,00	17,40	6,40	»
	Température moyenne annuelle.	13,00		12,99		12,12		12,46		12,24		12,60		12,70		»	

TEMPÉRATURES MOYENNES MINIMA ET MAXIMA (suite)

Année	Mois	BORDEAUX		FLOIRAC		SALLEBŒUF		LUSSAC		SAINT-ÉMILION		CHATEAU-D'YQUEM		BUDOS	
		Minima	Maxima	Minima	Maxima	Minima	Maxima	Minima	Maxima	Minima	Maxima	Minima	Maxima	Minima	Maxima
1902	Juin.....	11,8	23,9	11,8	22,8	11,7	21,6	11,1	23,7	11,8	23,7	11,6	23,0	9,7	23,6
—	Juillet....	15,1	28,3	14,9	27,3	15,3	26,1	14,6	28,5	15,2	28,3	15,1	27,3	13,1	28,2
—	Août.....	13,9	27,8	13,9	26,9	14,0	24,9	12,5	27,7	13,5	27,3	13,6	27,0	11,3	27,5
—	Septembre.	12,3	24,0	12,6	23,0	12,2	21,8	12,0	23,9	12,3	23,4	12,1	23,1	9,8	23,8
—	Octobre...	7,2	17,4	7,4	16,9	7,6	16,0	6,7	16,7	8,1	16,9	7,5	16,8	5,3	17,5
—	Novembre.	5,3	13,2	5,3	12,5	5,2	11,8	4,9	12,2	6,2	12,7	5,3	12,6	3,7	13,1
—	Décembre.	2,9	9,4	2,3	8,8	2,7	8,1	2,7	8,6	3,0	9,2	2,5	8,7	1,6	9,2
1903	Janvier...	2,3	10,3	2,1	10,3	1,9	8,9	2,2	9,5	2,6	10,1	1,5	10,1	-0,5	10,5
—	Février....	2,1	14,1	2,5	13,5	2,4	12,8	2,7	13,5	3,1	13,2	1,3	13,9	-1,6	14,2
—	Mars.....	5,3	16,6	4,9	15,6	4,8	14,9	4,6	15,6	5,2	15,3	4,1	15,6	1,8	16,2
—	Avril.....	4,4	17,0	4,4	15,7	4,0	15,0	3,8	16,0	4,2	15,8	3,9	16,1	1,2	16,6
—	Mai.....	10,3	22,9	9,8	21,6	9,7	21,0	10,1	22,3	10,5	22,0	9,7	21,6	7,8	21,8
	Moyenne.	7,74	18,74	7,66	17,91	7,63	16,91	7,33	18,18	7,98	18,16	7,35	17,98	5,27	18,52
	Température moyenne annuelle.	13,24		12,79		12,27		12,76		13,07		12,67		11,90	

La température moyenne de la période 1902-1903, dont les phénomènes météorologiques font l'objet de l'analyse actuelle, est dans son ensemble un peu au-dessous de la moyenne. Les mois où l'abaissement de la température a été le plus marqué sont juin 1902, septembre et octobre de la même année, puis enfin le mois d'avril 1903. La température très douce de janvier, février et mars ne suffit pas d'ailleurs à établir la compensation et l'année 1902-1903 reste une année froide.

L'hiver commence avec le mois de novembre, où le nombre moyen de jours de gelée est de 7 ou 8; en décembre, il fait aussi un peu froid.

Janvier, février et mars sont ensuite pluvieux et doux. C'est au commencement de la seconde quinzaine d'avril que se produisent les nouvelles gelées, si nuisibles à nos vignes et qui auraient été un véritable désastre pour la Gironde si elles n'avaient pas été si inégales et si la végétation de la vigne n'avait pas été aussi irrégulière. J'ai publié dans la *Petite Gironde* du 2 mai une note spéciale sur ces gelées et leur grandeur.

Les températures moyennes des diverses stations sont peu différentes entre elles. La plus basse est, comme de coutume, celle de Budos 11°, 90, et la plus élevée 13°, 24 est, encore cette année, obtenue dans le jardin de l'établissement des Eaux de la ville dans un quartier peuplé et abrité contre le vent; c'est surtout dans les mois d'hiver que la différence est sensible. D'un autre côté, les stations qui ont le plus grand nombre de jours de gelée ont souvent aussi le plus grand nombre de journées de grande chaleur, et il s'établit de cette manière une sorte de compensation entre l'été et l'hiver, compensation qui donne à toutes les stations des moyennes annuelles peu différentes.

Le tableau suivant renferme les comparaisons de la marche de la température en 1902-1903, avec la marche normale déduite des nombres obtenus à l'Observatoire de 1880 à 1900.

**Comparaison de la température observée à Floirac en 1902-1903  
avec la moyenne des vingt et une années 1880-11**

ANNÉE ET MOIS	TEMPÉRATURE MOYENNE A FLOIRAC (1880-1900)	TEMPÉRATURE de 1902-1903	ÉCART DE 1902-1903 à la moyenne
1902 Juin.....	18,7	17,3	— 1,4
— Juillet....	20,8	21,1	+ 0,3
— Août.....	20,8	20,4	— 0,4
— Septembre	18,7	17,8	— 0,9
— Octobre...	13,4	12,1	— 1,3
— Novembre.	9,3	8,9	— 0,4
— Décembre.	5,8	5,6	— 0,2
1903 Janvier ...	4,7	6,2	+ 1,5
— Février...	7,1	8,0	+ 0,9
— Mars.....	9,1	10,3	+ 1,2
— Avril.....	11,8	10,0	— 1,8
— Mai.....	15,1	15,7	+ 0,6
Moyenne.	12,9	12,8	— 0,1

Pendant la saison chaude, les journées de grande chaleur (maxima au-dessus de 30°) n'ont pas été cette année très nombreuses; à Floirac on en a observé : 3 en juin; 7 en juillet; 7 en août; 1 en septembre.

Le total des jours de grande chaleur est de 18, nombre un peu inférieur à la moyenne.

Dans la période de novembre à avril, avec des temps très variables, des vents violents de SW. et des retours brusques des vents vers le N. et le NE. on a observé de nombreuses périodes de gelée.

Entre le 18 novembre, première gelée à Floirac, et le 19 avril, nuit de la dernière gelée à l'Observatoire, il s'est produit 34 jours de gelée, nombre un peu inférieur à la moyenne qui est de 37.

Comme l'hiver précédent, la saison froide de 1902-1903 a été assez hâtive, mais les minima de la température ne dépassent guère ceux que l'on rencontre chaque année. Le fait le

plus remarquable est l'élévation anormale de la température en janvier, février et mars. Voici le tableau des minima extrêmes obtenus dans la Gironde :

TEMPÉRATURES MINIMA EN 1902-1903.	
Phare de Grave.....	— 5,4 le 2 décembre 1902.
Château-Loudenne...	— 4,5 les 5 déc. 1902 et 15 janv. 1903
Château-Lafite.....	— 7,0 le 15 janvier 1903.
Sainte-Hélène.....	— 8,5 le 15 janvier 1903.
Le Porge.....	— 9,0 le 15 janvier 1903.
Arès.....	— 8,6 le 15 janvier 1903.
Arcachon.....	— 7,9 le 15 janvier 1903.
Talence.....	— 9,1 le 15 janvier 1903.
Bordeaux (Don des Eaux).	— 6,9 le 8 décembre 1902.
Floirac.....	— 8,1 le 15 janvier 1903.
Sallebœuf.....	— 8,4 les 8 déc. 1902 et 15 janv. 1903
Lussac.....	— 8,8 le 15 janvier 1903.
Saint-Émilion.....	— 9,5 le 15 janvier 1903.
Château-d'Yquem....	— 9,0 les 7 déc. 1902 et 15 janv. 1903
Budos.....	— 12,8 le 8 décembre 1902.

Le minima absolu s'est produit le 15 janvier, après la tempête du 11 au 12 et la formation rapide d'un anticyclone qui, du 13 au 15, a son centre sur la mer du Nord. La période de vents de N. et de froid est d'ailleurs brusquement coupée par la tempête de S. et SW. qui commence en Irlande le 16 au matin. Il faut aussi remarquer que les froids de janvier étant produits par une cause énergique, ils sont presque identiques dans toutes les stations, et que les causes locales de refroidissement ont disparu devant l'intensité du vent. Il n'en est pas de même dans les gelées de novembre et de mars, qui sont des gelées de rayonnement, et de rayonnement local, et par suite les différences de climat des stations girondines se montrent d'une manière beaucoup plus sensible dans le tableau du nombre des jours de gelée et la date des gelées extrêmes.

NOMBRE DES JOURS DE GELEE EN 1902-1903								
	Octobre	Novembre	Décembre	Janvier	Février	Mars	Avril	TOTAL
Phare de Grave ...	0	2	7	7	2	1	0	19
Château-Louddenne.	0	2	7	7	3	1	0	20
Château-Lafite ....	0	2	9	12	11	5	1	40
Sainte-Hélène.....	3	5	8	13	14	6	7	56
Le Porge.....	3	4	10	15	17	8	12	69
Arès.....	3	6	10	13	19	5	7	63
Arcachon .....	0	2	8	12	7	1	1	31
Talence .....	3	6	11	14	20	7	5	66
Bordeaux (Don des Eaux).	0	4	8	9	11	1	3	36
Floirac.....	0	3	8	13	6	1	3	34
Sallebœuf.....	0	3	7	11	8	0	4	33
Lussac .....	1	5	8	10	8	2	4	38
Saint-Émilion.....	1	3	6	10	9	2	3	34
Château-d'Yquem.	3	5	8	14	16	3	4	53
Budos.....	6	8	11	16	20	14	14	89

Ces nombres sont généralement un peu plus élevés cette année que dans une année moyenne, à cause surtout des gelées tardives du mois d'avril.

La première gelée se produit le 24 octobre à Budos (— 0°,1); le 25 octobre, à Talence (— 0°,5); le 26 octobre, à Sainte-Hélène (— 1°,9); Le Porge (— 1°,4); Arès (— 0°,5); Lussac (— 1°,3); Saint-Émilion (— 0°,8); Château-Yquem (1°,0); le 3 novembre, à Bordeaux (0°,0); le 18 novembre, à Floirac (— 1°,4); le 19 novembre, au Phare de Grave (— 2°,3); Château-Louddenne (3°,0); Château-Lafite (4°,0); Arcachon (— 0°,8); Sallebœuf (— 3°,6).

La dernière gelée a lieu le 12 mars au Phare de Grave (— 0°,5), et Château-Louddenne (— 0°,5); le 15 avril, à Château-Lafite (— 0°,2); le 19 avril, à Sainte-Hélène (— 0°,8); Le Porge (— 1°,9); Arès (— 1°,8); Arcachon (— 0°,6); Talence (0°,0); Bordeaux (— 2°,0); Floirac (— 0°,5); Sallebœuf (— 1°,2); Lussac (— 1°,8); Saint-Émilion (— 1°,4); le 20 avril, à Château-Yquem (0°,0); le 26 avril, à Budos (— 1°,8).

Les températures maxima de la saison chaude sont très concordantes quant à leur grandeur; elles se produisent le 5 juillet dans la Lande, le 14 dans le Médoc et enfin le 16 août dans les vins blancs et l'Entre-deux-Mers.

TEMPÉRATURES MAXIMA EN 1902		
Phare de Grave.....	34,3	le 14 juillet 1902.
Château-Loudenne...	33,1	le 14 juillet 1902.
Château-Lafite.....	34,3	le 14 juillet 1902.
Sainte-Hélène.....	34,5	le 5 juillet 1902.
Le Porge.....	34,2	les 5 et 14 juillet 1902.
Arès.....	36,9	le 5 juillet 1902.
Arcachon.....	35,6	le 5 juillet 1902.
Talence.....	36,8	le 16 août 1902.
Bordeaux (Don des Eaux).	36,3	le 16 août 1902.
Floirac.....	35,7	le 16 août 1902.
Sallebœuf.....	33,8	le 16 août 1902.
Lussac.....	35,8	le 8 juillet 1902.
Saint-Émilion.....	35,5	le 14 juillet 1902.
Château d'Yquem....	37,0	le 16 août 1902.
Budos.....	36,7	le 16 août 1902.

Ces maxima absolus n'ont rien d'exagéré et on en rencontre tous les ans de même grandeur.

Les maxima du 5 juillet coïncident avec l'existence d'un anticyclone sur la mer du Nord et d'un ciel très pur. Le 14 juillet le temps est moins pur, mais le baromètre est toujours très élevé sur le nord de l'Europe. Vers le 16 août, les orages sont nombreux en France.

Tels sont les principaux résultats que les observations météorologiques de 1902-1903 ajoutent à notre connaissance du climat girondin. D'une manière générale, l'année a été froide et sèche.

# TABLEAUX

DES

Observations pluviométriques et thermométriques



**Commission Météorologique de la Gironde. — Pluies de Juin 1902.**

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Totaux mm		
La Coubre.....	15	.	.	.	.	.	.	2	2	.	.	.	1	2	4	0	0	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10	0	38,0	
Phare de Grave.....	21	.	.	.	.	.	.	1	5	.	.	.	2	6	7	4	1	.	.	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	13	1	67,7	
Saint-Nicolas.....	15	.	.	.	.	.	.	2	3	.	.	.	4	5	3	2	1	.	.	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	18	.	48,3	
Grand-Mont.....	14	.	.	.	1	2	6	.	3	.	.	.	4	5	2	11	.	.	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	20	.	71,6	
Phare d'Hourtin.....	7	.	.	.	.	1	3	.	3	.	.	0	3	5	3	4	1	.	7	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	26	.	53,2	
Mouthic.....	.	.	.	.	.	.	.	1	2	.	.	0	0	1	3	2	3	0	.	9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	7	11	34,4	
Gressier.....	13	.	0	.	.	1	4	.	0	.	.	0	0	1	7	6	5	1	.	9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	9	49,2	
Le Porge.....	10	.	.	.	.	1	4	.	1	.	.	.	0	4	2	7	1	.	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	9	65,0	
Arès.....	12	0	0	.	.	1	0	.	1	.	.	.	4	4	2	7	1	.	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	11	0	54,7	
Piquey.....	12	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	3	3	3	2	2	.	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	8	44,2	
Arcachon.....	11	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	3	1	5	5	3	3	.	10	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	12	3	59,3	
Audenge.....	9	.	.	.	.	.	0	.	.	.	17	3	4	6	2	7	6	.	13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	12	70,1	
Cazaux.....	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	18	.	6	2	7	.	6	.	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	8	71,3	
La Salle.....	11	.	.	.	.	1	3	.	2	.	40	1	8	3	1	.	.	14	.	14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	9	92,8	
Château-Louenne.....	24	.	.	.	.	1	1	.	1	.	1	2	4	5	3	3	.	9	.	9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10	0	65,3	
Château-Lafite.....	28	0	.	.	.	1	1	.	1	.	1	2	8	3	5	3	3	0	10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	14	.	81,6	
Saint-Julien.....	24	.	.	.	.	.	.	2	3	.	5	.	4	4	4	3	3	.	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	71,3	
Sainte-Hélène.....	.	.	.	.	.	2	3	.	1	5	.	2	6	1	4	4	.	18	.	18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	20	.	52,7	
Pierréton.....	14	1	3	.	.	3	1	2	1	5	0	1	6	3	4	2	.	10	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	25	133,0	
Belin.....	12	1	3	.	.	3	1	2	1	3	1	2	2	7	4	4	.	17	.	17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	15	77,8	
Cavignac.....	36	4	.	.	.	3	1	3	1	2	.	2	3	6	7	.	.	15	.	15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	99,8	
Saint-André-de-Cubzac.....	27	3	.	.	.	1	3	3	1	4	.	2	3	4	2	.	.	17	.	17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	17	.	82,1	
Salieubœuf.....	29	0	6	.	.	2	2	0	9	0	1	2	3	4	2	.	.	15	.	15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15	.	103,6	
Floirac (Observatoire).....	39	0	.	.	.	1	2	8	0	1	5	3	5	3	4	2	.	15	.	15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	18	.	90,8	
Hordeaux (Des Eaux).....	27	0	2	.	.	1	2	1	2	8	0	1	4	5	5	3	.	14	.	14	.	5	.	.	.	.	.	.	.	0	19	87,2	
Talence.....	14	0	5	.	.	1	1	3	1	3	1	0	3	1	7	2	2	4	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	100,4	
La Sauve.....	42	4	1	.	0	1	1	3	3	1	0	3	1	0	5	3	3	.	18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	17	.	79,0	
Château d'Yquem.....	21	4	3	.	.	1	2	0	7	2	6	1	3	4	3	.	.	18	.	18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	1	72,0	
Budos.....	15	1	2	.	.	2	0	2	5	3	.	3	1	4	3	0	.	16	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15	.	88,2	
Les Eglistotes.....	13	12	.	.	.	2	5	3	.	3	.	3	1	4	3	.	.	16	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	22	.	81,0	
Lussac.....	11	10	.	.	.	1	4	2	.	1	4	2	1	1	6	3	.	17	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	19	.	86,8	
Saint-Emilion.....	23	6	.	.	.	2	2	1	4	.	2	2	3	1	3	.	.	21	.	21	.	.	.	.	.	.	.	.	.	20	.	91,7	
Sauveterre.....	18	12	2	.	.	2	3	1	.	1	1	1	2	3	2	3	.	18	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	17	.	62,8	
Col-de-Fer.....	5	4	2	.	.	3	2	1	.	2	1	1	5	6	2	3	.	21	.	21	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	21	76,1	
Lamothe-Landerron.....	8	10	1	.	.	4	5	1	1	1	2	1	5	6	2	3	.	26	.	26	.	.	.	.	.	.	.	.	.	22	.	96,9	
Grignols.....	18	3	5	.	.	.	.	1	7	.	3	.	4	3	.	.	.	17	.	17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	17	84,9	
Capiteux.....	18	2	.	.	.	2	3	.	.	.	4	3	1	2	2	.	.	17	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	20	.	94,3	
Saint-Antoine-sur-l'Isle.....	26	8	.	.	.	2	3	.	.	.	.	1	2	8	1	.	.	15	10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	21	.	93,8	
Saint-Avit-du-Moliron.....	17	11	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

**Commission Météorologique de la Gironde. — Pluies de Juillet 1902.**

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Totaux mm	
La Coubre.....	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	4	2	.	.	.	.	4	.	.	.	2	0	.	.	.	.	.	16,3	
Phare de Grave.....	9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2	.	.	.	11	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	25,4	
Saint-Nicolas.....	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	5	4	1	.	.	3	.	3	2	.	.	.	.	.	.	.	10,3	
Grand-Mont.....	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	4	4	5	7	.	.	.	9	.	.	4	.	.	.	.	.	.	.	22,8	
Phare d'Hourtin.....	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	4	4	5	7	.	.	4	.	4	3	.	.	.	.	.	.	.	15,7	
Mouthic.....	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	5	5	7	.	.	.	4	.	.	3	1	.	.	.	.	.	.	24,9	
Gressier.....	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	10	2	.	.	.	1	.	.	.	8	1	.	.	.	.	.	26,7	
Le Porge.....	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	19	17	4	0	.	.	2	.	2	6	0	.	.	.	.	.	.	51,3	
Arès.....	2	0	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	7	20	2	0	.	.	2	.	2	6	0	.	.	.	.	.	.	39,8	
Piquey.....	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	0	4	11	0	.	.	5	.	.	.	9	.	.	.	.	.	.	34,1	
Arcachon.....	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	50,9	
Audenge.....	8	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	3	27	.	.	.	.	4	.	.	.	7	0	.	.	.	.	.	37,5	
Cazaux.....	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	18	1	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	20,7	
La Salle.....	4	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	4	.	2	1	.	.	3	.	.	.	6	.	.	.	.	.	.	42,3	
Château-Louenne.....	0	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	32	3	.	.	.	4	.	4	2	.	.	.	.	.	.	.	49,9	
Château-Lalite.....	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	1	25	.	.	.	9	.	.	.	6	.	.	.	.	.	.	40,4	
Saint-Julien.....	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	35	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	53,2	
Sainte-Hélène.....	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	26	.	.	.	.	3	.	3	.	6	1	.	.	.	.	.	43,4	
Pierrotton.....	5	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	0	22	1	.	3	.	5	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	52,5	
Belin.....	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	23	.	.	.	.	4	.	.	.	0	5	.	.	.	.	.	36,0	
Cavignac.....	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	22	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	50,6	
Saint-André-de-Cubzac.....	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	31	.	.	.	.	4	.	4	.	5	5	7	.	.	.	.	.	45,9	
Sallebeuf.....	3	2	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	0	26	0	.	.	.	5	.	.	11	2	.	.	.	.	.	.	48,5	
Floirac (Observatoire).....	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	31	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	40,5	
Bordeaux (Des Eaux).....	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	28	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	50,2	
Talence.....	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	26	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	40,5	
La Sauve.....	6	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	26	3	.	.	.	7	.	.	.	6	3	.	.	.	.	.	90,5	
Château d'Yquem.....	15	9	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	38	5	.	3	.	3	.	4	.	.	6	12	.	.	.	.	.	72,2	
Budos.....	18	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	32	5	.	4	.	.	4	.	.	.	8	.	.	.	.	.	.	59,4	
Les Eglisottes.....	15	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	33	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	65,2
Lussac.....	6	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	32	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	60,6	
Saint-Emilion.....	6	10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	29	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	73,6
Sauveterre.....	10	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	39	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	57,2
Col-de-Fer.....	15	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	37	.	.	3	.	.	2	.	2	3	11	.	.	.	.	.	.	72,8	
Le mothe-Landerron.....	23	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	33	1	.	.	.	4	1	.	.	.	10	.	.	.	.	.	.	62,8	
Grignols.....	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	34	8	.	6	.	.	.	.	.	.	5	.	.	.	.	.	.	62,0	
Capitieux.....	8	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	34	4	.	.	1	.	1	.	.	.	9	.	.	.	.	.	.	52,1	
Saint-Antoine-sur-l'Isle.....	5	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	27	.	.	.	.	.	2	.	.	.	7	4	.	.	.	.	.	74,7	
Saint-Avit-du-Moiron.....	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	40	.	.	.	.	.	2	.	.	.	8	10	.	.	.	.	.		



## Commission Météorologique de la Gironde. — Pluies de Septembre 1902.

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Totaux mm
La Courbe.....	1	.	.	28	4	.	.	.	.	1	.	4	.	.	1	0	.	.	.	.	.	.	9	2	6	.	.	.	.	.	57,9
Phare de Grave.....	.	.	.	25	12	.	.	.	1	.	0	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	0	5	.	.	.	.	.	49,4
Saint-Nicolas.....	.	.	.	5	23	11	.	.	2	.	.	12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	0	10	.	.	.	.	.	68,1
Grand-Mont.....	.	.	.	10	28	6	.	.	2	.	.	.	14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	4	.	.	.	.	.	.	69,0
Phare d'Hourtin.....	.	.	.	16	11	6	.	.	3	.	2	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	7	3	14	0	.	.	.	.	66,4
Montchic.....	.	.	.	18	15	3	.	.	2	.	2	3	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	7	8	5	.	.	.	.	75,2
Gressier.....	.	.	.	30	11	0	.	5	5	0	0	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9	8	9	.	.	.	.	.	79,4
Le Porée.....	.	.	.	23	13	1	.	6	6	0	17	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	12	4	2	0	0	.	.	.	89,8
Arès.....	.	.	.	29	10	5	.	7	.	0	3	10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	20	15	2	1	.	.	.	.	.	105,8
Piquet.....	.	.	.	30	13	5	.	7	.	4	3	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	27	4	.	.	.	.	.	.	.	94,7
Arcachon.....	.	.	.	32	12	2	.	1	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	18	5	3	.	.	.	.	.	.	99,5
Audenge.....	.	.	.	28	11	12	.	8	.	.	4	12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	19	2	3	.	.	.	.	.	.	107,1
Cazaux.....	.	.	.	30	13	6	.	8	.	.	4	17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	27	2	7	.	.	.	.	.	.	132,3
La Salie.....	.	.	.	30	13	5	.	8	.	.	5	35	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	18	2	.	.	.	.	.	.	77,5
Château-Louenne.....	.	.	.	28	15	6	.	2	.	0	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	25	7	4	.	.	.	.	.	.	97,8
Château-Lafite.....	.	.	.	21	5	11	0	6	.	3	.	3	15	.	.	.	.	.	.	.	.	3	9	6	1	.	.	.	.	.	78,3
Saint-Julien.....	.	.	.	26	9	5	.	.	.	7	.	3	9	.	.	.	.	.	.	.	.	6	5	7	.	.	.	.	.	.	71,0
Sainte-Hélène.....	.	.	.	26	10	1	.	.	9	.	.	6	15	.	.	.	.	.	.	.	.	11	5	11	.	.	.	.	.	.	80,7
Pierrot.....	.	.	.	13	7	2	.	.	12	.	.	15	12	.	.	.	.	.	.	.	.	6	7	7	.	.	.	.	.	.	101,8
Belin.....	.	.	.	12	17	7	.	.	10	.	.	2	7	.	.	.	.	.	.	.	.	7	10	5	4	.	.	.	.	.	76,3
Cavignac.....	.	.	.	23	7	3	.	.	9	.	3	2	8	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	3	.	.	.	.	.	.	70,6
Saint-André-de-Cubzac.....	.	.	.	24	11	6	.	.	10	.	4	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	20	2	1	.	.	.	.	.	70,3
Sallebeuf.....	.	.	.	14	9	.	.	.	12	.	.	4	4	.	.	.	.	.	.	.	.	6	6	3	0	0	0	.	.	.	62,9
Florac (Observatoire).....	.	.	.	12	15	1	.	.	9	0	.	4	5	.	.	.	.	.	.	.	.	6	6	3	0	0	0	.	.	.	66,9
Bordeaux (D <sup>on</sup> des Eaux).....	.	.	.	17	12	1	.	.	6	.	.	3	7	.	.	.	.	.	.	.	.	8	10	3	.	.	.	.	.	.	60,5
Talence.....	.	.	.	12	9	.	.	.	6	.	.	5	7	.	.	.	.	.	.	.	.	8	10	3	.	.	.	.	.	.	74,4
La Sauve.....	.	.	.	6	14	3	.	.	19	.	.	13	4	.	.	.	.	.	.	.	.	15	16	7	.	.	.	.	.	.	80,6
Château d'Yquem.....	.	.	.	10	3	.	.	0	15	5	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	21	14	5	.	.	.	.	.	.	89,0
Budos.....	.	.	.	0	17	1	.	.	20	2	.	5	3	.	.	.	.	.	.	.	.	24	.	0	0	0	0	.	.	.	86,3
Les Eglistottes.....	.	.	.	16	11	7	.	.	4	14	3	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9	9	8	1	0	0	.	.	.	89,2
Lussac.....	.	.	.	4	14	9	.	.	8	2	.	9	4	.	.	.	.	.	.	.	.	9	8	3	0	0	0	.	.	.	92,0
Saint-Emilion.....	.	.	.	5	14	10	.	.	6	3	.	6	7	.	.	.	.	.	.	.	.	8	27	3	3	2	.	.	.	.	148,3
Sauveterre.....	.	.	.	10	.	.	.	.	7	.	.	12	26	.	.	.	.	.	.	.	.	5	5	3	2	.	.	.	.	.	54,6
Col-de-Fer.....	.	.	.	10	0	.	.	.	9	.	.	15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15	2	1	.	.	.	.	.	.	92,9
Lamothe-Landerron.....	.	.	.	10	0	.	.	.	7	5	.	12	2	.	.	.	.	.	.	.	.	11	15	3	0	.	.	.	.	.	86,7
Gignols.....	.	.	.	32	2	.	.	.	16	0	.	13	9	.	.	.	.	.	.	.	.	6	9	1	.	.	.	.	.	.	62,7
Capitieux.....	.	.	.	13	.	.	.	.	19	4	.	14	8	.	.	.	.	.	.	.	.	6	9	1	.	.	.	.	.	.	69,1
Saint-Antoine-sur-l'Isle.....	.	.	.	5	11	7	.	.	4	.	.	5	10	.	.	.	.	.	.	.	.	24	.	.	.	.	.	.	.	.	69,1
Saint-Avit-du-Moiron.....	.	.	.	1	9	2	.	.	4	.	.	10	13	.	.	.	.	.	.	.	.	24	.	.	.	.	.	.	.	.	69,1

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies d'Octobre 1902.*

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Totaux mm
La Coubre.....		5			1	0	1	0			1	5			0	9	6	7	4	0			2									42,1
Phare de Grave.....					7	2					1	1			0	14	15	11					2									67,2
Saint-Nicolas.....	1	3		0	16	5		0			0	8			2	9	5	1	12		1	2		2								55,9
Grand-Mont.....	5	5													11	5	3	15		6			6						1	1		97,0
Phare d'Hourtin.....		6		0	8	7	1				2	8			4	11	9	7	5	2	2	4	1	1								69,1
Monthic.....					3	6	0	1				3				1	5	8	7	2	2	0	0	3			0		0			56,7
Gressier.....	0	7	0			7		3				0			2	3	6	2	11	2	0	0	3									47,1
Le Porée.....	1	8	1									0			1	6	4	4	11	3	0	2		3								49,4
Arès.....					1	20	0	2	0	0	0	1	0	0	1	6	4	2	5	2			3									64,7
Piquey.....	3	6	1	1								2			2	6	4	2	5	2			3									51,5
Arcachon.....	17	2		2	3	8	1	2			2				1	13	4	13		2			3									65,9
Audenge.....	2	23	1	2	4	3	1				1				0	6	8	3	12	4	1	6		4								77,3
Cazaux.....	7	23			3	15	1					1			2	7	8	10	4	4			0									74,2
Phare d'Hourton.....	9	20	2	5	6	7		3			4				2	7	8	10	4	4	1	0										45,6
Château-Louderne.....	1	1									0	1			2	3	10	7	11	1		1										50,9
Château-Lafite.....		7		3								0			0	10	11	8	8	4	3	0	4									65,6
Saint-Julien.....					4	0		2	1		8				0	5	10	11	9	1	0	0	4									69,4
Sainte-Hélène.....	1	27	3	5		1	8	0	2		6				0	5	10	6	9	18	0	2	1	3								104,4
Pierrot.....	2	16	5	10				3	3		5				2	7	10	6	9	1	3	2	6									78,7
Bein.....					1	7	5	3	0		5				3	4	7	4	9	5	5	4										66,3
Cavignac.....		8													0	3	4	7	2	8		1										54,2
Saint-André-de-Cubzac.....		16	3	8	1		0	2	0		0	1	0	0	1	4	8	7	9	1	2	1	1	0	0	0						64,4
Sallebeuf.....		0	18	0	7		0	3	0		2	2	0	0	6	7	10	6	14		4		2									75,9
Floirac (Observatoire).....	30	0	8					3	1	0	1	2			0	3	10	6	16	1		2		1								51,0
Bordeaux (Des des Eaux).....	1	33	0	9		0	2	3	1	0	2				0	3	10	6	16	1		2		1								45,6
Talence.....		19		12				3	1		2				0	3	10	6	16	1		2		1								51,0
La Sauve.....		19		12				3	1		2				0	3	10	6	16	1		2		1								45,6
Château d'Yquem.....	1	9	4	14		1	2	2		0	2				1	5	6	6	6	0		0	3									67,0
Budos.....	2	8	4	12		1	2	2		11					2	3	5	10	9		2		3									73,7
Les Eglistottes.....	11			5	7	2									2	3	5	3	14	0	3		3									89,1
Lussac.....		14									1	6			0	4	8	5	14	1		3	4									46,0
Saint-Emilion.....		15	2	8							2				1	6	2	5	13		2	2	6									69,2
Sauveterre.....	3	17	1	11	1	0	6		3	9		2			1	3	6	7		1	2	2	6									49,7
Col-de-Per.....	4	3	12					8		1	10				1	3	6	5	11		1	2	2									67,4
Lamothe-Landerron.....		2	3	6	2		0	1				6			1	3	10	4														60,6
Grignols.....	2	3	6	9		2	2	1							1	3	6	5	11													
Capiteux.....	2	2	4	3	11		8		2	1					1	3	10	4														
Saint-Antoine-sur-l'Isle.....	2	10			4		8		2	1					1	3	6	5	11													
Saint-Avit-du-Moiron.....																																

# Commission Météorologique de la Gironde. — Pluies de Novembre 1902.

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Totaux mm	
La Coubre.....	.	.	.	.	2	.	7	1	13	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	6	2	19	9	6	.	1	7	77.4	
Phare de Grave.....	.	.	.	.	2	.	7	4	25	0	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	8	4	24	10	9	.	9	6	111.3	
Saint-Nicolas.....	.	.	.	.	2	1	9	2	15	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	5	1	18	8	13	2	3	7	89.4	
Grand-Mont.....	.	.	.	.	1	2	8	3	16	1	.	.	1	1	2	.	.	.	.	.	.	3	9	2	20	12	11	4	2	6	101.8	
Phare d'Hourtin.....	.	.	.	.	2	1	6	5	14	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	6	2	20	16	14	2	3	7	103.1	
Mouthic.....	.	.	.	.	3	6	7	4	2	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	4	8	5	9	15	25	15	8	5	118.3	
Gressier.....	.	.	.	.	3	2	4	3	4	0	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	4	3	10	23	21	6	3	8	98.6	
Le Porge.....	.	.	.	.	3	2	10	2	10	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	1	15	23	16	2	7	4	105.9	
Arès.....	0	.	.	.	4	1	9	4	12	0	.	0	.	0	.	.	.	.	.	.	.	4	6	3	15	23	16	2	5	8	113.4	
Piquey.....	.	.	.	.	3	2	6	3	10	1	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	7	1	13	32	14	0	3	9	106.6	
Arcachon.....	.	.	.	.	3	6	16	6	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	8	5	22	50	17	2	5	5	156.0	
Andenge.....	.	.	.	.	1	2	6	7	16	3	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	7	3	16	43	14	1	4	8	136.9	
Cazaux.....	.	.	.	.	1	4	6	9	12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	12	5	18	30	17	1	5	7	127.7	
La Salie.....	.	.	.	.	2	3	5	5	14	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	7	4	20	21	20	0	2	16	124.3	
Château-Loudeune.....	.	.	.	.	2	0	5	5	9	3	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	7	8	15	14	13	0	4	6	80.2	
Château-Lafite.....	.	.	.	.	0	2	2	8	7	3	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	7	8	16	20	12	1	7	1	96.2	
Saint-Julien.....	.	.	.	.	2	1	5	13	8	2	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	3	8	1	12	20	11	.	9	7	96.3	
Sainte-Hélène.....	.	.	.	.	0	2	3	3	8	2	.	2	.	0	1	.	.	.	.	.	.	3	2	11	29	17	.	1	6	7	96.3	
Pierroton.....	.	.	.	.	1	0	5	8	10	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	3	2	14	30	12	4	2	12	110.3	
Belin.....	.	.	.	.	1	1	7	5	11	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	3	6	18	25	22	4	7	12	127.1	
Cavignac.....	.	.	.	.	3	10	5	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	87.5
Saint-André-de-Cubzac.....	.	.	.	.	2	6	9	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	82.9
Sallebeuf.....	.	.	.	.	2	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	93.8
Roillac (Observatoire).....	0	0	0	.	1	1	8	9	7	2	.	1	.	0	0	0	.	.	.	.	.	2	1	4	13	26	11	0	3	11	99.9	
Bordeaux (D <sup>ne</sup> des Eaux).....	.	.	.	.	1	12	4	8	1	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	5	13	25	13	0	5	9	101.1	
Talence.....	.	.	.	.	2	0	9	6	7	2	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	1	5	13	32	10	1	4	8	102.2	
La Sauve.....	.	.	.	.	2	.	3	11	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	78.0
Château d'Yquem.....	.	.	.	.	2	10	3	6	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	100.9
Bulos.....	0	.	.	.	2	11	4	7	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	1	10	37	11	4	1	8	99.8	
Les Eglisottes.....	.	.	.	.	3	16	8	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	77.7
Lussac.....	.	.	.	.	3	9	3	10	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	81.9
Saint-Emilion.....	0	.	.	.	3	6	3	9	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	0	0	12	20	15	0	0	8	86.9	
Sauveterre.....	0	0	0	.	2	13	3	7	1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	0	5	19	25	11	1	1	6	96.9	
Col-de-Fer.....	.	.	.	.	.	15	9	9	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	3	2	5	26	5	.	4	7	77.2	
Lamothe-Landerron.....	.	.	.	.	.	23	4	6	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	1	6	7	26	10	0	2	6	96.8	
Grignols.....	.	.	.	.	.	11	1	8	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	5	4	8	32	14	2	3	7	97.1	
Capitieux.....	.	.	.	.	.	10	10	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	11	4	8	24	13	3	1	7	91.8	
Saint-Antoine-sur-l'Isle.....	.	.	.	.	.	13	2	7	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	78.8
Saint-Avit-du-Moiron.....	.	1	2	.	.	.	.	1	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	77.2

Commission Météorologique de la Gironde. — Pluies de Décembre 1902.

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Total
La Coubre.....	2	5	16	2											3	2	0			1	0	0										53,2
Phare de Grave.....	1	5	21								1	2			2	2	1			3		1	0									77,1
Saint-Nicolas.....	0	4	7	2							2	3			2	1	1			3		1	0									49,1
Grand-Mont.....	2	6	8								3				1	1	1			2		2	0									69,1
Phare d'Hourtin.....	3	5	16	4							3				2	1	1			2		3	0									73,3
Mouthic.....	0	4	12	10							1	1			2	3	1			1		2	0									67,0
Gressier.....	1	4	11	6							2				1	3	1			0		3	3									77,8
Le Porge.....	1	12	17	7							2				1	3	1			1		6	2									76,2
Ares.....	1	3	15	5							2				0	0	2			3		3	1									106,8
Piquey.....	1	3	15	5							2				0	2	0			3		3	1									79,5
Arcachon.....	1	3	14	10							2				0	2	0			3		3	1									86,1
Audenge.....	1	4	12	4							0				0	3	1			2		2	3									81,9
Cazaux.....	4	1	12	10							0				2	1	1			2		2	3									83,2
La Salle.....	0	0	13	4							2				1	0	1			2		4	3									89,6
Château-Laudenne.....		4	18	2							0				1	0	1			3		1	2	0								115,10
Château-Lafite.....	1	4	10	0							0				0	0	1			0		3	1									126,9
Saint-Julien.....	1	3	22	3							2				2	1	1			0		3	1									57,2
Sainte-Hélène.....	1	3	22	3							2				2	1	1			0		3	1									88,8
Pierroton.....	0	3	19	6							1				0	1	3			2		3	2									83,6
Belin.....	1	1	11	6							1				1	2	2			1		2	0									73,6
Cavignac.....	1	1	11	6							1				1	2	2			1		2	0									77,5
Saint-André-de-Cubzac.....	6										1				1	2	2			1		1										(1) 5,2
Sallebeuf.....	6	14	7								1				1	3	1			3		1										75,7
Floirac (Observatoire).....	0	2	16	5							0				1	0	2			1		1	0									46,7
Bordeaux (Des Eaux).....	0	3	21								1				4	0	2			2		0										77,6
Talence.....	1	2	18	6							2				1	1	0			2		1	0									55,7
La Sauve.....	0	0	17								0				0	1	2			3		3	0									55,7
Château d'Yquem.....	0	0	11	6							2				0	1	6			2		3	0									63,2
Budos.....	0	1	13	4							2				1	2	3			1		3	0									51,4
Les Eglistottes.....	10	6	3								2				1	0	3			2		0										46,1
Lussac.....	5	4	14	4							2				0	2	1			0		1										54,4
Saint-Emilion.....	2	4	14	2							2				0	2	1			0		2	0									58,3
Sauveterre.....	0	2	13	4							2				1	0	2			1		1										50,4
Col-de-Fer.....	1	3	14								1	4			0	1	3			0		1										43,2
Lamothe-Landerron.....	2	1	9	5							4	0			2	2	1			1		4	0									38,7
Grignols.....	1	2	8								3				0	3	0			0		3	0									49,5
Capiteux.....	1	1	2	7							3				0	3	4			1		5	8									36,9
Saint-Antoine-sur-l'Isle.....	1	2	4	7							1									2		1										34,9
Saint-Avit-du-Moiron.....	10			3							1									1		5										34,9

(1) Observations incomplètes.

**Commission Météorologique de la Gironde. — Pluies de Janvier 1903.**

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Totaux mm	
La Coubre.....	5	7	7	2	1	.	.	0	.	.	1	1	1	.	.	.	1	3	3	1	.	.	.	6	0	.	.	.	.	.	.	49,1	
Phare de Grave.....	3	5	11	3	2	.	.	.	.	.	21	3	.	.	.	.	1	2	2	.	.	3	3	2	0	.	.	.	.	.	.	57,9	
Saint-Nicolas.....	9	6	7	4	.	.	.	.	.	.	9	5	.	.	.	.	1	1	0	.	.	5	5	5	0	.	.	.	.	.	.	50,7	
Grand-Mont.....	11	2	4	6	.	.	.	.	.	.	9	3	.	.	.	.	1	1	2	.	.	5	5	4	.	.	.	.	.	.	.	48,2	
Phare d'Hourtin.....	18	5	10	4	.	.	.	.	.	.	15	9	.	.	.	.	1	1	1	.	.	3	4	1	.	.	.	.	.	.	.	74,5	
Mouthic.....	11	10	2	3	.	.	.	.	.	.	13	10	.	.	.	.	1	0	2	.	.	5	.	.	.	2	.	.	.	.	.	58,7	
Gressier.....	8	12	3	7	.	.	.	.	.	.	19	7	.	.	.	.	.	2	1	.	.	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	62,5	
Le Porge.....	12	3	2	3	0	.	.	.	.	.	19	10	.	.	.	.	.	1	1	.	.	4	.	.	.	0	.	.	.	.	.	59,5	
Arès.....	9	8	2	2	.	.	.	.	.	.	17	16	.	.	.	.	1	.	.	0	.	5	.	.	.	.	0	.	.	.	.	59,6	
Piquey.....	9	10	2	2	.	.	.	.	.	.	21	11	.	.	.	.	.	1	0	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	59,9	
Arcachon.....	7	9	2	3	.	.	.	.	.	.	17	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	50,6	
Audenge.....	3	3	3	.	.	.	.	.	.	.	23	6	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	45,2	
Cazaux.....	5	2	1	2	.	.	.	.	.	.	17	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	39,7	
La Salle.....	8	5	5	4	.	.	.	.	.	.	8	3	.	.	.	.	0	4	.	.	.	3	2	0	1	.	.	.	.	.	.	34,3	
Château-Louenne.....	5	8	6	4	0	.	.	0	.	.	9	4	.	.	.	.	0	0	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	48,8	
Château-Lafite.....	5	7	3	4	.	.	.	.	.	.	19	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	2	0	1	.	.	.	.	.	.	40,0	
Saint-Julien.....	7	6	3	3	.	.	.	.	.	.	11	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	40,9	
Sainte-Hélène.....	9	5	1	2	.	.	.	.	.	.	0	12	7	.	.	.	1	3	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	41,4	
Belin.....	8	4	1	1	.	.	.	.	.	.	9	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	34,2	
Cavignac.....	5	5	6	2	0	.	.	.	.	.	12	3	.	.	.	.	1	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	39,5	
Saint-André-de-Cubzac.....	2	2	4	1	2	.	.	.	.	.	10	5	.	.	.	.	0	5	.	.	.	2	0	1	.	.	.	.	.	.	.	31,8	
Sallebeuf.....	5	5	4	1	1	.	.	.	.	.	9	4	.	.	.	.	0	0	4	.	.	2	0	1	.	.	.	.	.	.	.	32,1	
Piorac (Observatoire).....	7	6	1	1	.	.	.	.	.	.	9	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	33,9	
Bordeaux (Des Eaux).....	4	4	1	1	.	.	.	0	0	.	8	6	.	.	.	.	0	5	1	.	.	2	0	1	.	.	.	.	.	.	.	32,1	
Talence.....	3	1	.	2	.	.	.	.	.	.	8	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	30,9	
La Save.....	4	2	0	.	.	.	.	.	.	.	4	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	18,1	
Château d'Yquem.....	5	3	0	1	.	.	.	.	.	.	4	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	18,1	
Budos.....	3	9	4	2	2	.	.	.	.	.	6	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	37,7	
Les Eglisottes.....	5	3	3	2	.	.	.	.	.	.	8	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	27,1
Lussac.....	2	3	2	3	.	.	.	.	.	.	7	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	32,9
Saint-Emilion.....	3	1	1	2	0	.	.	.	.	.	10	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	26,4	
Sauveterre.....	5	2	2	2	.	.	.	.	.	.	7	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	14,8
Col-de-Per.....	5	2	2	2	.	.	.	.	.	.	7	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	25,4
Lamothe-Landerron.....	6	6	0	.	.	.	.	.	.	.	9	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	25,3
Grignols.....	2	3	2	2	.	.	.	.	.	.	8	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	29,6
Capiteux.....	6	6	0	.	.	.	.	.	.	.	9	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	29,5
Saint-Antoine-sur-l'Isle.....	2	3	5	0	.	.	.	.	.	.	8	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	29,5
Saint-Avit-du-Moiron.....	2	3	2	2	.	.	.	.	.	.	8	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	29,8

(1) Observations incomplètes.



**Commission Météorologique de la Gironde. — Pluies de Février 1903.**

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	Totaux mm
La Coubrè.....	4	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15,0
Phare de Grave.....	3	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10,8
Saint-Nicolas.....	2	10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	13,5
Grand-Mont.....	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	17,9
Phare d'Hourtin.....	3	12	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15,8
Mouthic.....	6	8	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	14,6
Gressier.....	4	11	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15,4
Le Porge.....	3	12	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16,9
Arès.....	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6,1
Piquey.....	4	14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	19,0
Arcachon.....	4	13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	18,8
Audenge.....	5	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	21,5
Cazaux.....	5	20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	27,6
La Salie.....	4	20	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	27,0
Château-Louenne.....	3	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	11,4
Château-Lafite.....	6	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15,4
Saint-Julien.....	4	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	12,0
Sainte-Hélène.....	4	13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	19,0
Pierrotin.....	6	11	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	17,1
Belin.....	5	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	20,4
Cavignac.....	5	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9,0
Saint-André-de-Cubzac.....	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,0
Sallebeuf.....	4	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10,0
Floirac (Observatoire).....	3	9	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	14,5
Bordeaux (Des Eaux).....	4	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10,2
Talence.....	4	12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16,5
La Sauve.....	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4,3
Château d'Yquem.....	2	17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	18,9
Budos.....	4	17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	21,3
Les Eglisottes.....	2	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9,5
Lussac.....	4	9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	12,5
Saint-Emilion.....	3	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10,3
Sauveterre.....	7	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	13,2
Col-de-Fer.....	11	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15,1
Lamothe-Landerron.....	0	20	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	20,8
Grignols.....	3	14	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16,8
Capitieux.....	3	20	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	24,4
Saint-Antoine-sur-l'Isle.....	6	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	11,6
Saint-Avit-du-Moiron.....	3	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6,4

(1) Observations incomplètes.

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies de Mars 1905.*

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Totaux mm	
La Coubre.....	0	2	11	3	1	1	1	0	5	2	.	.	.	.	.	4	2	0	0	.	.	.	.	1	1	4	4	3	0	.	.	34,9	
Phare de Grave.....	2	8	19	3	3	3	2	8	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	3	5	5	.	.	64,4	
Saint-Nicolas.....	2	3	26	3	3	3	2	8	1	.	.	.	.	.	.	3	3	0	.	.	.	.	.	.	.	1	3	8	4	.	.	69,5	
Grand-Mont.....	1	1	27	5	1	1	1	4	0	.	.	.	.	.	.	0	1	.	.	.	.	.	.	2	3	3	5	5	3	0	.	43,7	
Phare d'Hourtin.....	2	15	3	0	3	4	3	0	12	0	.	.	.	.	.	2	3	1	9	7	0	.	.	.	.	2	3	4	9	7	0	52,8	
Mouthic.....	3	12	5	1	1	4	0	12	0	.	.	.	.	.	.	3	2	.	.	.	.	.	.	1	2	9	7	3	.	.	55,5		
Gressier.....	3	12	5	1	3	4	8	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	.	.	.	.	.	1	1	2	9	7	3	.	.	57,9	
Le Porcé.....	2	11	4	0	2	2	4	8	.	.	.	.	.	.	.	3	0	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	11	6	1	.	52,9	
Arès.....	2	10	5	2	2	1	5	5	.	.	.	.	.	.	.	4	4	1	.	.	.	.	.	.	.	2	4	5	2	.	.	39,0	
Piquey.....	2	16	3	0	3	4	8	.	.	.	.	.	.	.	.	5	5	2	.	.	.	.	.	.	.	2	13	5	3	1	.	63,4	
Arcachon.....	1	3	6	1	4	1	8	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	2	15	5	3	1	.	54,2	
Audenge.....	2	1	14	5	1	2	1	6	.	.	.	.	.	.	.	2	2	0	.	.	.	.	.	.	.	1	3	5	4	0	.	58,8	
La Salie.....	2	20	6	1	2	1	6	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	0	.	.	.	.	.	.	.	1	3	5	4	0	.	48,0	
Château-Louienne.....	5	24	4	1	2	0	10	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	0	.	.	.	.	.	.	.	3	8	3	1	.	.	66,0	
Château-Laitie.....	8	18	3	1	2	1	9	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	3	7	6	1	0	.	64,2	
Saint-Julien.....	2	20	1	0	1	1	12	0	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	6	8	3	.	60,5	
Sainte-Hélène.....	0	2	16	3	0	3	1	5	0	.	.	.	.	.	.	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	1	3	13	6	2	.	58,1	
Pierrotton.....	2	18	9	2	4	1	8	0	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	14	7	2	1	.	71,2
Belin.....	4	21	6	2	2	4	1	9	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	6	4	2	.	60,9	
Cavignac.....	0	20	3	1	1	2	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	0	3	4	2	.	.	(1) 36,8	
Saint-André-de-Cubzac.....	0	25	3	0	2	1	5	0	.	.	.	.	.	.	.	1	3	0	.	.	.	.	.	.	.	1	2	7	5	1	.	55,7	
Sallebourg.....	1	17	7	0	1	0	6	0	.	.	.	.	.	.	.	1	2	0	.	.	.	.	.	.	.	0	3	5	5	4	.	59,0	
Floirac (Observatoire).....	1	18	3	1	0	1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	1	4	0	.	.	.	.	.	.	.	1	2	8	5	.	.	46,5	
Bordeaux (Don des Eaux).....	1	21	4	0	1	1	10	.	.	.	.	.	.	.	.	1	4	.	.	.	.	.	.	.	.	1	2	9	5	.	.	61,2	
Talence.....	1	24	3	0	0	1	6	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	3	5	4	.	56,3	
La Sauve.....	1	24	4	1	1	2	6	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	6	6	1	.	56,7	
Château d'Yquem.....	1	24	6	3	1	1	6	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	8	2	2	.	59,8	
Budos.....	6	17	3	0	1	5	12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	5	8	2	.	43,5	
Les Eglisottes.....	1	14	5	1	0	1	6	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	4	6	3	.	44,3	
Lussac.....	1	19	4	1	1	3	1	3	.	.	.	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	4	6	3	.	48,7	
Saint-Emilion.....	1	18	5	1	3	1	3	.	.	.	.	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	1	2	.	.	20,8	
Sauveterre.....	2	10	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	1	2	.	.	48,7	
Col-de-Fer.....	1	1	25	4	.	2	0	4	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	.	.	.	.	.	.	3	5	5	2	.	.	44,6		
Lamothe-Landerron.....	1	1	15	8	.	1	0	4	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	5	3	2	.	.	56,3	
Grignols.....	2	19	5	1	2	1	7	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	3	5	3	2	.	.	48,4	
Captieux.....	2	19	5	1	2	1	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	37,3	
Saint-Antoine-sur-l'Isle.....	4	13	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		
Saint-Avit-du-Moiron.....	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		

(1) Observations incomplètes.

**Commission Météorologique de la Gironde. — Pluies d'Avril 1905.**

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Totaux mm		
La Coubre.....	4				1											1					3	22	2	8	1		2	13	2		53,3		
Phare de Grave.....	5	0			2											0					6	8	1	3	5		2	10	1	2	43,6		
Saint-Nicolas.....																						1	6	8			3	1	2		33,2		
Grand-Mont.....					8																	2	5	4	8		6	3	6	0	41,5		
Phare d'Hourtin.....	2	0			1																0	5	7	10	4		6	1	12	1	37,9		
Moutich.....					2	0															0	5	7	10	4		6	1	11	2	34,2		
Gressier.....	2	1	0	1	0																0	3	15	9	3		6	1	14	2	50,7		
Le Porge.....																					0	3	15	9	3		6	1	14	2	58,3		
Arès.....	1	2	1	1																	1	5	8	9	2		5	3	11	0	53,2		
Piquey.....	6	3	1	1																											46,7		
Arachon.....																																58,1	
Audenge.....	5	2	1	1													0				1	9	6	6	2		8	2	12			55,0	
Cazaux.....					2																1	3	4	4	5	0	2	2	7			30,6	
La Salle.....	2	2	1	1																	1	5	3	9							48,1		
Château-Louderne.....																					1	7	3	2							29,6		
Château-Lalite.....	0	5	1	2													2				0	10	5	5			5	2	18	5	60,0		
Saint-Julien.....					2												0				0	11	3	6	1		5	5	3	15	3	55,3	
Sainte-Hélène.....	2	2			0	4											2				1	6	4	5	5		2	5	3	18	3	58,6	
Pierroton.....	2	4	1	0	1	1											2				2	13	5	4	5		7	4	13	1		61,4	
Belin.....	4	1			2	0											3				0	12	6	3	0		3	2	13			50,6	
Cavignac.....																					12											47,5	
Saint-André-de-Cubzac.....					2												2					4										(1) 52,5	
Saltebeuf.....	1																				0	7	3	4			6	3	18	0		47,8	
Florac (Observatoire).....	1			1	1	0											1				1	10	3	4	9		4	2	15	1		49,2	
Bordeaux (Des des Eaux).....	1																				1	10	4	3	9		4	1	12	0		44,9	
Talence.....	1	0															1				2	11	4	5	0		5	4	15	1		50,0	
La Sauve.....	1	1			1																3	15	4	3	1		5	3	9			46,3	
Château d'Yquem.....																					10	7	4	4	3		6	2	13			49,5	
Budos.....	2	1				0															11	9	4	4	5	2		5	2	13			53,5
Les Eglistottes.....	5				1												0				0	9	1	1			4	6	25	2		54,2	
Lussac.....	1																				3	15	1	1			1	6	15			41,4	
Saint-Émilion.....	1	2			0	0															12	11	6	3	2		5	2	10			41,7	
Sauveterre.....	1				0	1															3	5	2	4	3		7	4	13	0		60,3	
Col-de-Fer.....	1																				5	3	2	4	3		7	10	2			38,2	
Lamothe-Landerron.....	1				0	0															5	3	2	3	1		8	6	11	2		53,7	
Grignols.....	1																				3	8	4	3	1		8	3	13	2		48,2	
Captieux.....	2	0				1															2	11	2	3	4		9	3	14	2		53,1	
Saint-Antoine-sur-l'Isle.....	2	3															3				3	7	3				5					46,8	
Saint-Avit-du-Moiron.....																					6	11	1	0	2		7					43,5	

(1) Observations incomplètes.





COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

Observations thermométriques de Château-Loudene

Dates	Juin 1902		Juillet 1902		Août 1902		Septembre 1902		Octobre 1902		Novembre 1902		
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	
1	12.0	16.1	15.0	26.6	14.8	28.7	15.0	36.3	5.9	15.0	5.3	41.8	
2	11.2	22.2	15.1	25.3	10.2	24.8	19.8	39.2	9.8	14.0	5.0	14.1	
3	14.2	22.2	16.0	26.8	10.8	22.4	19.0	35.8	5.8	15.3	4.3	11.1	
4	13.9	23.3	16.6	27.5	12.8	27.4	15.2	19.9	10.4	13.0	8.8	19.0	
5	13.8	21.5	18.8	31.1	17.0	27.0	14.0	21.6	10.1	17.7	15.0	30.9	
6	9.9	20.0	20.8	29.0	16.8	30.0	12.8	30.2	7.4	16.3	12.7	18.8	
7	10.4	19.7	18.9	27.5	17.0	24.5	13.8	23.0	5.0	15.3	9.8	16.2	
8	10.9	18.9	19.8	31.8	16.0	24.8	17.0	25.0	13.0	22.0	7.0	14.5	
9	7.9	17.5	19.8	31.5	13.7	23.8	17.0	24.8	16.1	21.3	10.7	16.0	
10	8.2	18.6	19.7	26.9	13.5	24.0	12.5	23.4	12.0	21.5	5.6	9.7	
11	10.9	19.0	15.0	23.2	14.8	22.0	15.0	32.0	13.9	17.9	9.3	17.2	
12	13.0	20.7	15.6	26.1	13.6	22.0	15.0	22.0	13.9	17.9	13.2	17.1	
13	11.2	18.3	17.8	30.0	14.5	22.5	15.0	19.8	5.0	18.6	9.2	17.0	
14	7.8	17.2	19.8	32.1	11.1	24.1	9.4	19.0	5.8	19.3	8.9	13.9	
15	7.2	16.8	18.7	26.2	11.1	27.1	11.7	30.4	8.7	18.1	8.7	12.9	
16	8.0	16.9	17.6	26.3	15.5	32.9	12.4	32.0	12.6	17.2	8.8	10.9	
17	8.0	13.8	16.8	24.3	15.5	32.8	14.0	31.0	6.0	16.0	4.8	7.8	
18	8.7	20.8	19.7	31.4	14.0	32.0	13.8	31.0	9.2	17.8	13.1	14.1	
19	13.0	21.3	15.8	24.2	15.0	32.0	10.6	21.2	9.3	18.2	3.0	4.0	
20	9.2	21.3	15.8	24.2	15.0	32.0	10.6	21.2	9.3	18.2	3.0	4.0	
21	11.9	21.8	15.0	21.1	12.3	26.5	8.8	24.3	10.8	20.3	4.2	20.3	
22	10.7	24.0	15.2	21.8	14.2	26.4	15.4	26.3	8.4	17.8	4.3	8.4	
23	14.3	27.0	9.8	25.1	12.9	23.5	15.3	30.0	10.2	15.7	6.0	16.0	
24	17.9	33.3	14.3	21.9	14.9	26.1	11.2	21.0	7.9	15.1	6.2	10.9	
25	13.5	28.2	13.7	26.0	13.5	22.9	11.5	19.1	5.9	14.0	9.3	13.9	
26	17.0	35.4	16.9	26.7	15.5	23.8	18.0	30.1	5.3	13.6	11.4	14.1	
27	12.7	28.4	16.9	29.9	11.2	25.0	13.8	17.8	4.8	17.1	9.9	11.0	
28	19.8	33.9	10.8	22.0	10.1	30.2	11.8	18.0	6.8	14.8	7.0	14.0	
29	13.9	25.0	15.0	24.3	13.5	21.6	9.2	15.5	8.9	15.0	8.0	15.0	
30	13.0	23.0	14.2	28.5	11.1	22.5	6.1	14.1	4.0	11.1	8.2	13.9	
31	"	"	13.3	26.1	14.0	23.0	"	"	"	4.0	11.2	"	
Rayon	11.98	21.67	15.99	26.19	14.71	25.50	13.48	21.75	8.68	16.93	6.90	15.00	

COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

Observations thermométriques de Château-Loudene (Suite).

	Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
	4.8	12.9	1.9	9.9	6.0	10.0	2.8	15.0	2.1	14.3	7.3	16.6
	9.1	15.0	6.7	12.0	3.3	7.1	5.3	12.0	8.4	13.1	5.1	18.0
	8.2	10.0	13.6	10.0	0.6	8.2	8.8	14.1	6.0	13.3	41.9	17.6
	0.2	2.0	13.6	10.0	2.7	5.0	5.9	13.8	3.7	15.2	8.5	19.7
	4.3	1.0	7.1	14.2	1.3	11.2	10.2	13.2	4.8	15.1	10.9	18.0
	3.0	2.0	12.8	13.8	3.0	13.0	7.0	12.7	7.8	15.0	8.0	16.1
	4.0	1.2	7.3	13.0	3.7	16.8	1.8	11.9	7.0	19.0	5.9	19.4
	4.2	2.7	8.0	13.0	3.9	14.6	4.2	10.8	8.9	15.2	8.4	20.6
	3.0	4.4	8.4	13.5	3.2	13.0	1.8	11.2	3.7	15.1	7.2	18.1
	2.0	4.1	9.2	14.9	3.2	14.0	4.2	10.0	5.8	14.1	8.4	19.3
	6.0	12.1	4.4	12.0	2.3	15.3	2.7	12.1	5.9	16.0	7.9	16.0
	6.5	13.0	4.0	5.3	1.0	13.3	0.5	14.9	3.9	15.1	6.4	16.2
	5.0	9.4	2.6	0.9	4.7	11.8	4.1	13.0	5.9	14.1	5.0	15.8
	5.8	10.4	3.5	1.4	1.9	10.0	6.7	17.9	5.9	13.0	7.6	17.1
	3.0	12.1	4.5	0.3	0.3	8.3	8.0	16.0	3.8	13.8	6.0	18.6
	3.2	13.9	2.3	6.7	1.3	10.6	3.8	13.6	4.7	9.3	9.2	19.4
	12.1	14.2	5.4	8.7	4.3	10.6	3.2	13.8	2.2	11.0	8.0	18.0
	11.9	14.1	6.0	9.5	1.6	12.8	3.5	12.3	2.6	11.1	8.4	18.7
	4.8	12.2	6.0	14.2	1.9	15.2	3.3	13.6	3.0	14.1	9.9	22.1
	7.8	11.8	5.3	3.2	1.0	15.1	1.9	16.0	4.1	20.3	10.5	22.8
	8.3	11.0	3.2	9.1	4.6	19.1	5.8	21.0	9.2	13.8	9.0	25.4
	8.4	10.4	1.5	5.7	7.0	18.4	7.8	20.2	6.0	15.3	11.8	29.3
	2.9	8.6	2.0	9.5	4.7	11.0	8.8	22.1	5.6	12.3	12.9	28.7
	9.0	13.0	18.7	12.7	8.7	16.5	4.5	11.9	18.0	30.8	"	"
	0.6	3.8	2.2	7.4	6.0	12.0	10.6	21.0	4.2	14.7	19.4	30.0
	9.9	11.0	3.3	7.4	16.3	8.2	20.3	5.0	13.1	17.0	27.0	"
	12.8	0.7	12.0	8.8	13.9	8.2	15.0	3.5	15.0	17.9	26.1	"
	7.4	10.9	0.5	11.3	15.0	8.1	16.8	8.0	20.6	16.0	22.7	"
	9.6	10.5	1.7	10.1	"	"	6.9	13.8	9.9	16.3	23.8	"
	4.0	8.2	3.3	4.9	"	"	4.8	16.6	11.0	14.5	14.5	20.2
	2.0	9.0	1.0	10.9	"	"	6.9	14.5	"	"	13.1	19.8
	3.98	9.03	3.18	9.03	3.46	13.01	5.34	15.41	5.70	11.86	10.32	21.00

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques de Château-Lafite.

## Observations thermométriques de Château-Lafite. (Suite).

Date	Juin 1902		Juillet 1902		Août 1902		Septembre 1902		Octobre 1902		Novembre 1902		Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903		
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	
1	11,0	22,2	23,6	28,9	13,0	26,4	14,0	26,9	3,5	15,4	2,0	11,2	5,0	12,7	1,4	8,8	2,0	6,0	2,1	14,6	1,1	14,6	7,2	14,8	
2	10,8	23,4	14,1	27,5	14,8	28,8	18,9	29,4	7,4	13,8	3,4	12,8	8,0	13,5	4,6	9,9	0,8	4,9	3,8	12,0	2,0	14,4	5,4	15,9	
3	13,7	23,1	16,0	28,0	9,0	22,5	19,0	26,5	2,4	15,7	1,4	14,1	6,7	11,8	8,1	12,8	1,2	7,8	2,2	11,2	4,0	12,2	11,3	19,2	
4	11,3	22,4	15,8	29,0	10,7	23,0	15,0	21,3	0,8	13,3	7,7	13,2	1,0	1,9	8,2	15,1	4,0	8,2	5,6	14,1	1,8	14,8	3,5	18,4	
5	11,0	22,9	17,0	32,0	16,4	26,8	13,3	21,2	9,7	15,4	9,6	17,9	—	1,6	5,2	14,0	2,1	9,6	15,5	5,1	15,9	9,4	17,9		
6	10,8	21,5	17,9	30,6	14,1	29,0	1,6	16,2	10,2	10,2	10,2	10,2	—	1,2	4,1	12,5	0,4	11,4	5,4	9,6	4,2	15,1	7,6	17,2	
7	9,5	19,8	18,4	29,6	16,0	31,5	14,1	23,0	3,8	16,3	9,5	14,4	—	6,3	5,6	11,2	2,1	11,9	0,8	12,7	3,6	18,6	4,5	18,4	
8	10,5	20,6	18,9	32,8	15,9	23,8	11,6	24,7	12,7	21,8	9,0	13,9	4,4	1,9	7,8	8,9	15,4	3,2	12,8	2,1	9,6	3,7	14,0	6,7	18,5
9	6,3	18,6	18,7	29,8	16,4	25,4	15,6	34,7	12,7	21,8	9,0	13,9	4,4	1,9	7,8	8,9	15,4	3,2	12,8	2,1	9,6	3,7	14,0	6,7	18,5
10	7,9	21,2	21,0	26,8	10,0	24,0	12,3	24,8	11,4	21,2	4,5	10,4	1,9	7,8	8,9	15,4	3,2	12,8	2,1	9,6	3,7	14,0	7,8	18,5	
11	7,1	19,7	24,0	29,2	12,6	21,1	14,0	22,7	8,9	16,4	6,6	16,8	2,5	12,9	7,8	8,6	0,9	9,3	2,1	9,6	3,7	14,0	7,8	18,5	
12	9,1	22,2	22,4	29,8	11,4	20,9	13,9	20,4	15,0	17,8	11,2	15,9	3,9	10,1	4,0	1,8	3,2	12,3	4,6	16,6	4,0	13,1	4,6	15,4	
13	10,5	18,0	16,0	22,3	13,4	22,3	12,9	18,1	14,1	16,9	10,1	13,6	4,6	11,9	4,7	1,9	0,4	10,0	4,0	16,3	4,1	12,1	5,9	17,6	
14	8,2	17,9	19,0	24,3	9,2	23,8	11,3	18,4	14,1	16,9	7,4	13,6	2,3	11,8	7,0	1,8	3,1	10,3	7,0	14,3	0,2	14,0	4,1	18,3	
15	7,4	17,7	18,1	26,4	10,3	23,8	11,3	18,8	5,6	13,0	6,5	14,1	2,3	11,8	7,0	1,8	3,1	10,3	7,0	14,3	0,2	14,0	4,1	18,3	
16	7,3	17,7	16,2	24,1	15,0	25,8	13,4	20,1	14,1	15,9	7,6	11,6	6,2	13,4	6,5	5,3	7,1	9,1	11,9	3,9	10,9	9,0	17,7	17,2	
17	7,6	17,7	16,2	24,1	15,0	25,8	13,4	20,1	14,1	15,9	7,6	11,6	6,2	13,4	6,5	5,3	7,1	9,1	11,9	3,9	10,9	9,0	17,7	17,2	
18	8,0	21,0	12,1	24,9	12,4	24,9	12,4	24,9	12,4	24,9	12,4	24,9	12,4	24,9	12,4	24,9	12,4	24,9	12,4	24,9	12,4	24,9	12,4	24,9	
19	12,2	25,4	12,5	24,6	16,8	28,8	8,9	21,2	5,1	16,8	0,2	9,7	5,7	10,8	5,7	10,8	5,7	10,8	5,7	10,8	5,7	10,8	5,7	10,8	
20	10,0	21,8	11,8	22,4	12,4	22,4	12,4	22,4	12,4	22,4	12,4	22,4	12,4	22,4	12,4	22,4	12,4	22,4	12,4	22,4	12,4	22,4	12,4	22,4	
21	11,3	25,4	13,0	20,7	12,4	23,2	14,2	26,3	10,0	15,0	0,9	5,0	8,0	10,6	0,7	7,8	3,0	15,8	6,0	19,8	9,0	14,2	12,5	25,9	
22	14,0	26,8	10,1	20,5	10,3	27,9	12,1	19,0	7,9	15,0	3,9	9,4	4,0	10,0	0,0	8,9	4,0	10,8	8,2	21,9	4,1	16,8	12,7	28,8	
23	13,8	39,0	7,0	20,6	10,3	27,9	12,1	19,0	7,9	15,0	3,9	9,4	4,0	10,0	0,0	8,9	4,0	10,8	8,2	21,9	4,1	16,8	12,7	28,8	
24	16,1	30,1	14,1	25,0	12,6	32,3	12,6	21,2	6,0	13,9	7,4	11,9	1,5	6,0	0,0	8,9	4,0	10,8	8,2	21,9	4,1	16,8	12,7	28,8	
25	17,5	30,2	12,6	25,7	13,0	32,3	12,6	21,2	6,0	13,9	7,4	11,9	1,5	6,0	0,0	8,9	4,0	10,8	8,2	21,9	4,1	16,8	12,7	28,8	
26	16,0	36,0	18,8	27,2	13,0	32,3	12,6	21,2	6,0	13,9	7,4	11,9	1,5	6,0	0,0	8,9	4,0	10,8	8,2	21,9	4,1	16,8	12,7	28,8	
27	13,6	28,0	15,8	23,4	12,7	27,5	12,7	27,5	12,7	27,5	12,7	27,5	12,7	27,5	12,7	27,5	12,7	27,5	12,7	27,5	12,7	27,5	12,7	27,5	
28	18,4	23,0	9,0	24,8	15,2	29,5	10,2	17,4	5,4	14,2	5,3	10,3	8,4	10,4	—	3,5	9,6	12,5	11,4	16,2	7,8	16,7	1,1	20,4	
29	19,0	24,6	12,0	25,8	17,9	32,0	7,4	15,0	7,0	12,8	6,7	12,0	8,4	10,4	—	3,5	9,6	12,5	11,4	16,2	7,8	16,7	1,1	20,4	
30	13,4	24,8	12,9	28,8	14,9	24,4	3,4	19,8	0,6	9,8	7,6	12,5	1,3	8,4	—	4,4	2,7	—	—	—	—	—	—	—	
31	—	—	12,9	26,9	12,9	32,8	—	—	4,1	10,1	—	—	1,3	8,4	—	4,4	2,7	—	—	—	—	—	—	—	
Moyenne	11,44	22,77	14,76	26,67	13,31	25,56	12,31	21,17	6,66	15,09	5,33	11,77	2,90	8,77	1,81	8,43	1,50	11,79	4,10	14,31	3,96	14,00	9,70	20,85	

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques de Sainte-Hélène.

Date	Juin 1902		Juillet 1902		Août 1902		Septembre 1902		Octobre 1902		Novembre 1902		Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	11,4	18,0	12,7	29,2	11,4	25,6	12,5	27,6	2,8	11,4	—	12,2	2,6	13,1	1,5	9,8	0,6	10,4	2,4	14,5	0,4	19,8	6,8	17,0
2	9,2	23,7	13,5	28,7	13,6	25,0	17,0	30,4	4,6	16,8	0	15,5	6,6	15,0	7,3	11,6	0,4	6,6	5,2	12,6	5,9	13,1	10,4	17,7
3	12,3	24,2	14,3	30,1	7,3	26,0	16,3	29,0	0,5	20,2	0,2	17,0	6,3	13,1	8,0	12,7	—	10,0	6,0	13,0	3,3	12,0	10,4	19,0
4	7,6	23,9	11,4	30,6	9,0	30,2	14,8	20,6	9,2	17,4	6,2	19,8	9,4	3,8	8,3	14,0	—	9,8	3,9	13,0	0,4	16,0	5,5	18,5
5	7,8	24,7	15,2	34,5	15,5	28,3	13,8	22,6	10,3	17,0	10,2	20,5	—	1,7	5,4	18,6	—	1,6	14,6	9,2	14,6	6,7	15,1	
6	7,4	22,0	17,0	27,7	15,4	28,8	13,4	24,0	5,3	17,5	10,8	20,5	—	6,8	1,5	14,8	0,3	12,5	6,3	12,2	2,4	16,7	7,4	
7	8,0	20,6	18,2	30,1	14,6	24,5	12,8	25,6	8,9	20,3	8,8	17,1	—	6,8	0,3	6,3	16,3	—	0,6	13,5	1,5	21,6	3,1	
8	7,6	20,2	17,3	31,6	16,2	25,0	15,6	27,8	6,8	23,7	6,2	15,3	—	9,2	1,4	6,7	15,7	—	1,3	10,5	6,4	17,2	7,4	
9	7,2	18,8	18,2	32,0	11,3	26,2	17,2	25,4	10,0	22,7	3,3	13,3	—	5,2	8,2	6,5	14,5	0,2	14,7	—	13,0	6,6		
10	6,6	19,7	10,6	25,7	8,9	26,7	14,3	27,3	7,7	18,4	6,6	17,1	—	8,6	16,7	0,6	15,0	—	0,6	2,0	16,6	7,3		
11	8,2	20,2	11,3	24,5	9,6	21,7	14,3	27,3	11,6	19,3	11,0	16,3	—	4,4	13,6	2,8	6,0	—	1,3	10,5	6,4	17,2	7,4	
12	10,0	21,6	10,6	28,0	10,3	22,0	16,0	22,2	11,6	20,8	3,0	18,3	—	5,2	11,4	—	1,3	13,2	—	2,3	15,2	4,5		
13	10,8	18,7	15,3	34,0	10,4	24,7	13,3	26,8	3,0	20,0	5,3	14,3	—	2,8	6,0	—	1,8	13,2	—	3,3	19,4	3,4		
14	8,2	18,5	18,6	34,2	8,6	25,0	11,0	22,3	3,2	19,5	3,6	14,0	—	5,2	—	—	1,3	10,6	—	3,4	14,5	5,0		
15	7,4	16,7	15,5	26,1	9,0	29,6	12,4	22,1	7,3	20,0	4,4	12,0	—	3,2	0,7	—	1,3	10,6	—	3,4	14,5	5,0		
16	7,0	17,0	17,4	25,0	11,4	31,0	12,2	23,8	11,6	16,6	6,3	13,1	—	8,5	—	—	1,3	10,6	—	6,1	15,6	2,1		
17	5,3	19,8	16,4	25,3	13,8	26,4	13,8	21,4	3,0	16,7	3,2	6,9	—	5,8	14,7	8,2	4,0	—	9,6	3,3	12,5	0,3		
18	7,0	23,6	11,5	26,2	11,3	32,7	15,7	22,8	7,7	17,7	0,6	4,4	—	11,5	13,9	6,1	11,7	—	9,6	3,3	12,5	0,3		
19	8,8	23,2	15,8	35,8	15,5	27,6	9,7	21,3	8,8	19,0	3,0	3,7	—	3,3	12,0	6,3	13,6	—	1,5	17,6	—	12,3	7,2	
20	10,7	22,6	13,8	32,8	14,5	27,3	11,5	25,0	12,2	19,3	—	6,1	—	5,2	11,8	4,4	11,8	—	2,6	13,6	—	11,7	6,6	
21	11,3	23,0	13,4	31,8	8,2	26,5	14,9	28,0	9,7	19,1	—	6,1	—	5,5	11,9	—	1,3	13,0	—	2,6	12,0	8,8		
22	9,2	20,4	10,9	34,0	10,4	29,0	15,4	29,2	5,3	17,2	1,4	17,1	—	5,8	11,0	—	2,8	13,3	—	8,2	15,6	6,6		
23	12,3	32,1	5,2	25,8	10,0	31,2	15,8	29,5	8,2	16,5	3,5	10,8	—	10,3	—	—	2,3	12,8	—	23,3	6,4			
24	13,2	33,0	14,0	21,6	12,8	26,8	10,3	26,5	4,8	10,2	4,7	11,1	—	10,2	—	—	2,5	12,6	—	22,7	2,4			
25	17,3	35,0	17,7	11,4	26,2	10,3	20,5	20,0	0,0	14,2	8,2	9,0	—	3,0	7,8	—	10,7	—	8,2	3,2				
26	13,2	31,0	18,8	28,4	12,7	26,8	10,0	21,0	1,9	16,4	9,6	12,0	—	1,5	11,0	—	4,3	15,6	—	3,0	20,2	18,4		
27	12,3	30,6	16,3	28,3	9,5	26,5	10,8	21,7	4,5	17,3	8,2	12,0	—	5,8	11,0	—	7,0	18,7	—	7,3	15,5	7,7		
28	19,4	27,0	13,8	22,8	14,4	26,6	4,5	19,4	6,0	15,5	7,6	11,0	—	8,5	10,3	—	10,3	—	7,5	16,6	9,4			
29	19,4	27,0	13,8	22,8	14,4	26,6	4,5	19,4	6,0	15,5	7,6	11,0	—	8,5	10,3	—	10,3	—	7,5	16,6	9,4			
30	16,0	25,3	10,2	30,6	14,6	21,7	1,3	15,0	—	11,0	6,7	12,5	—	2,5	7,5	—	7,0	17,0	—	8,9	18,6	45,5		
31	"	"	15,0	27,6	12,3	26,5	"	"	—	11,4	"	"	—	2,2	7,8	—	4,4	15,5	—	4,4	15,5	45,3		
Moyn	10,20	23,28	14,43	27,36	11,57	26,75	13,71	23,46	5,81	17,44	4,80	13,8	2,19	9,63	1,71	10,94	0,66	13,48	3,55	16,04	2,77	15,72	8,65	

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

Observations thermométriques de Sainte-Hélène. *Suiv.*



## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques du Porge.

Dates	Juin 1902		Juillet 1902		Août 1902		Septembre 1902		Octobre 1902		Novembre 1902	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	11,0	19,6	11,6	27,9	14,1	26,2	11,2	28,2	9,2	18,8	—	15,8
2	8,1	10,6	13,0	27,8	14,2	24,8	16,6	28,9	5,3	18,2	0,2	11,8
3	40,1	24,5	12,2	28,4	8,3	29,8	17,6	24,9	1,2	10,0	1,6	17,0
4	9,7	23,6	10,4	31,2	8,6	29,8	15,2	21,2	8,6	17,9	4,7	20,2
5	40,2	23,3	15,0	34,2	13,2	27,2	11,9	21,6	10,6	17,0	10,0	20,3
6	6,2	19,4	18,0	27,9	14,9	28,8	10,9	21,9	6,0	16,2	9,5	20,2
7	7,6	18,7	18,0	27,3	15,1	28,9	12,5	21,3	2,6	19,8	9,7	18,6
8	11,9	18,8	17,0	27,8	15,8	25,3	13,7	20,6	6,5	23,2	5,3	13,5
9	7,6	19,6	17,0	30,8	11,5	24,8	14,6	26,7	11,6	22,8	6,9	13,8
10	6,9	17,8	10,2	27,9	9,3	24,6	10,2	20,7	8,3	22,5	3,0	13,8
11	8,2	20,2	12,9	28,6	7,9	22,2	10,1	23,8	7,0	17,2	6,3	17,8
12	9,3	20,7	10,0	27,8	11,2	21,8	11,3	23,7	12,2	20,6	11,2	17,9
13	10,6	18,2	14,7	33,6	11,2	22,5	13,0	19,6	2,3	19,8	6,0	18,7
14	7,3	16,6	16,7	24,8	9,4	30,3	11,6	31,8	6,2	21,4	6,1	15,2
15	7,7	16,6	18,7	38,2	7,3	27,3	6,6	21,2	2,7	20,2	4,6	15,5
16	7,7	20,2	16,7	32,9	14,0	26,2	12,6	21,8	6,1	16,9	3,2	9,2
17	6,4	22,5	10,6	34,8	13,5	32,6	11,2	22,3	8,6	17,8	0,5	7,6
18	6,2	22,5	10,6	34,8	13,5	32,6	11,2	22,3	8,6	17,8	0,5	7,6
19	8,3	21,8	15,0	34,8	14,0	32,9	11,2	22,3	8,6	17,8	0,5	7,6
20	9,2	22,5	15,0	34,8	14,0	32,9	11,2	22,3	8,6	17,8	0,5	7,6
21	12,7	22,5	13,6	32,9	13,2	32,9	13,2	32,9	13,2	32,9	13,2	32,9
22	7,3	20,2	6,9	21,8	7,3	27,9	10,6	25,9	6,6	20,6	2,0	7,2
23	10,6	20,2	11,3	28,8	8,6	22,2	4,6	15,3	5,0	11,8	—	—
24	15,4	32,5	11,3	28,8	11,9	30,8	8,6	22,2	4,6	15,3	5,0	11,8
25	15,4	32,5	11,3	28,8	11,9	30,8	8,6	22,2	4,6	15,3	5,0	11,8
26	12,2	27,9	10,2	26,6	9,9	20,8	9,9	20,8	1,4	13,8	40,2	14,8
27	19,0	29,3	16,9	32,9	12,6	28,6	10,0	20,9	0,8	14,9	7,2	14,8
28	14,4	25,2	11,5	26,6	12,6	28,6	10,0	20,9	3,3	17,8	5,1	13,5
29	13,0	26,2	7,4	26,7	10,3	22,2	2,4	17,2	5,1	15,8	6,6	11,5
30	16,2	29,8	8,0	27,2	12,8	21,8	0,1	13,0	—	1,0	9,2	6,5
31	—	—	11,2	27,2	11,3	25,6	—	—	—	0,8	11,8	—
Moyenne	10,08	23,07	13,33	27,35	11,88	26,27	10,31	22,96	5,85	17,83	4,70	13,85

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques du Porge (Suite).

	Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	3,6	14,6	3,1	10,9	3,6	13,2	1,2	14,2	—	0,8	17,8	7,8
2	9,0	14,6	7,1	12,2	2,1	7,3	5,9	15,3	1,1	13,2	5,1	17,9
3	7,6	12,2	40,1	15,3	—	8,0	7,0	15,2	0,2	12,4	9,0	18,2
4	8,0	4,9	9,1	15,3	—	3,8	11,2	3,0	14,5	0,4	14,6	18,2
5	—	6,0	0,9	5,6	17,6	—	11,8	9,4	14,9	8,6	14,8	10,7
6	—	6,5	—	1,2	1,0	16,2	—	1,1	15,8	6,6	13,6	9,6
7	—	8,4	0,9	5,6	15,6	0,3	15,1	—	1,7	12,6	0,3	21,5
8	—	8,0	2,8	4,0	15,3	0,0	16,6	1,4	10,6	8,1	15,4	5,2
9	—	5,4	3,2	5,3	15,2	—	1,1	15,6	—	1,7	12,2	—
10	—	5,0	6,2	7,2	15,9	0,9	13,2	1,2	8,3	—	0,9	11,1
11	—	3,6	12,2	3,0	12,2	—	1,0	16,6	—	1,1	12,2	—
12	5,2	14,2	2,6	11,7	—	2,0	13,8	—	3,2	16,1	0,0	16,0
13	4,3	10,9	—	4,7	8,2	0,0	15,2	1,0	18,2	3,1	15,2	1,3
14	5,2	12,7	—	5,4	3,9	1,1	11,8	0,1	19,2	1,5	14,5	1,0
15	1,2	13,2	—	9,0	1,0	—	11,8	4,3	18,6	—	3,0	16,5
16	1,0	14,8	—	6,6	4,9	—	1,1	10,5	4,0	12,8	1,2	12,2
17	8,6	15,0	3,0	10,2	—	9,7	9,7	—	0,4	13,8	—	11,2
18	8,7	15,0	3,0	10,2	—	9,7	9,7	—	0,4	13,8	—	11,2
19	3,0	16,9	5,9	14,6	—	14,1	19,8	—	3,0	13,8	1,9	16,1
20	4,2	12,6	3,2	13,2	—	3,8	17,6	—	2,0	17,8	1,5	19,5
21	3,9	13,6	0,4	11,8	2,0	22,1	—	0,4	22,7	7,9	17,3	5,6
22	0,2	11,2	—	3,3	13,8	4,5	22,1	2,2	34,0	6,1	15,1	10,0
23	—	0,8	10,4	—	10,4	—	1,1	13,6	5,3	21,8	5,2	11,6
24	—	1,5	10,8	—	1,8	10,8	—	1,1	13,6	7,6	20,2	9,9
25	—	1,6	10,3	—	0,8	10,6	—	4,0	15,2	8,2	25,0	0,9
26	—	4,4	41,2	—	2,0	11,9	6,2	17,6	8,6	19,7	0,2	30,0
27	—	4,4	41,2	—	2,0	11,9	6,2	17,6	8,6	19,7	0,2	30,0
28	—	4,4	41,2	—	2,0	11,9	6,2	17,6	8,6	19,7	0,2	30,0
29	5,2	11,3	—	2,0	14,8	5,7	17,6	7,7	44,3	8,2	14,8	16,2
30	5,2	11,3	—	2,0	14,8	5,7	17,6	7,7	44,3	8,2	14,8	16,2
31	2,8	12,5	—	3,9	9,1	—	—	3,5	13,8	9,0	18,6	15,2
32	2,0	9,4	—	1,9	13,8	—	—	—	—	—	—	—
Moyenne	2,00	10,37	0,76	12,66	0,05	14,66	3,08	15,95	2,00	15,33	8,11	21,40

COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

Observations thermométriques d'Arès.

Dates	Juin 1902		Juillet 1902		Août 1902		Septembre 1902		Octobre 1902		Novembre 1902	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	11,0	23,3	11,5	29,5	10,0	27,9	13,2	29,1	2,4	18,0	— 0,9	13,1
2	8,1	21,6	11,1	28,5	15,3	25,0	18,3	29,6	2,1	15,5	— 1,2	15,3
3	13,0	26,6	15,2	30,0	10,8	24,8	18,2	25,1	1,5	19,0	— 0,9	18,2
4	10,0	24,8	11,7	33,1	8,4	30,3	15,1	19,7	6,4	18,8	5,3	21,1
5	11,1	24,4	16,4	36,9	17,3	28,2	14,0	21,9	9,4	18,0	9,9	20,1
6	7,2	20,5	17,5	27,9	15,1	27,5	11,4	22,0	4,4	17,6	10,0	20,3
7	9,2	19,9	18,2	27,2	16,2	24,5	10,7	21,8	4,1	18,0	10,5	14,6
8	12,2	19,3	16,9	31,4	12,3	24,9	14,9	27,0	14,6	22,0	5,4	14,0
9	8,5	18,3	19,3	34,9	7,9	25,2	10,9	25,8	8,0	17,8	3,4	16,9
10	7,6	16,8	19,3	34,9	12,3	24,9	14,9	27,0	14,6	22,0	5,4	14,0
11	7,5	21,2	13,2	24,3	10,8	23,7	13,3	25,8	8,0	17,8	4,9	17,5
12	10,6	22,1	11,1	22,2	12,2	22,3	12,1	21,8	13,3	18,8	11,6	14,9
13	10,5	16,9	15,6	25,5	11,3	24,8	7,9	21,9	3,3	20,3	7,1	17,8
14	10,6	18,5	19,4	36,3	8,6	25,8	11,9	22,8	2,3	19,1	4,7	14,2
15	7,9	17,5	17,4	24,5	7,9	31,5	15,5	22,0	7,1	30,7	3,0	14,9
16	8,0	17,6	17,4	24,7	14,1	31,4	14,9	22,3	7,3	20,3	6,2	12,7
17	7,8	19,7	16,9	24,9	15,4	25,9	11,1	22,8	8,2	17,0	3,4	7,6
18	7,2	25,3	11,5	26,3	10,5	29,5	7,9	23,0	8,4	12,3	1,3	8,2
19	12,2	26,3	15,9	26,4	16,2	32,1	7,2	25,6	9,1	18,0	— 2,5	7,8
20	10,1	33,8	12,5	22,3	15,6	29,4	10,0	30,2	9,8	19,0	— 5,2	6,6
21	14,3	27,6	14,7	31,0	10,6	24,9	12,2	30,3	14,0	17,8	0,7	7,8
22	8,7	21,1	7,6	33,2	8,2	28,0	13,7	22,2	6,2	17,4	3,5	13,8
23	12,0	30,9	5,1	25,1	7,6	29,4	13,7	22,2	4,4	15,1	6,5	13,1
24	15,2	33,9	12,7	31,0	13,0	25,7	13,9	21,6	1,3	15,9	7,8	13,8
25	13,9	28,9	18,1	27,7	14,6	22,5	12,4	21,6	— 0,5	16,2	10,2	14,1
26	10,8	31,9	18,0	25,4	7,7	29,3	10,4	19,8	1,6	17,1	8,3	14,3
27	13,5	28,0	9,3	24,3	12,0	32,5	9,9	19,6	1,8	16,3	6,0	13,5
28	13,5	27,6	10,1	23,8	16,1	22,1	6,1	16,8	6,1	16,1	7,4	10,9
29	16,9	26,9	12,9	25,1	13,5	25,9	—	—	—	—	—	—
30	16,9	26,9	12,9	25,1	13,5	25,9	—	—	—	—	—	—
31	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Moyenne	10,93	22,08	12,08	27,74	12,80	27,00	12,04	23,47	5,59	17,61	4,34	18,39

COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

Observations thermométriques d'Arès. (Suite).

	Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	2,9	14,8	2,3	11,8	0,9	12,8	1,7	14,5	— 0,2	18,7	9,2	16,9
2	3,8	15,0	7,3	11,7	— 1,4	8,2	5,7	13,2	0,9	13,1	5,3	17,2
3	4,9	13,8	9,5	12,8	— 2,3	9,8	8,1	13,9	2,3	12,2	10,8	18,5
4	8,5	6,8	8,5	16,5	3,7	12,8	4,4	15,2	— 0,2	15,1	10,2	20,1
5	6,5	1,9	4,0	16,2	1,6	12,6	6,0	14,2	9,5	14,8	10,9	19,8
6	— 6,7	— 1,2	2,9	11,8	1,9	10,2	7,4	12,7	1,7	17,0	9,5	18,8
7	— 8,1	0,8	2,7	15,2	— 1,3	14,1	0,0	12,9	1,1	20,5	4,3	20,3
8	— 7,8	3,0	6,0	15,7	— 1,2	16,8	0,0	11,0	6,9	13,8	8,0	21,0
9	— 5,7	4,7	6,5	13,2	— 1,3	16,2	— 0,2	12,5	0,7	13,1	7,8	18,7
10	— 2,1	7,5	7,4	14,7	— 0,9	16,0	2,1	9,0	1,1	16,8	10,1	19,5
11	0,5	11,8	5,1	11,6	1,3	18,1	0,2	12,8	— 1,4	18,6	8,3	16,9
12	5,7	13,0	5,1	11,8	— 2,3	14,5	3,5	16,7	0,5	16,7	6,2	17,3
13	5,2	11,5	— 7,5	— 0,2	0,6	12,7	— 0,8	18,1	4,6	16,0	2,1	16,8
14	7,8	13,7	— 5,6	0,1	— 1,1	12,0	1,0	16,5	1,9	11,7	1,8	19,5
15	2,1	12,1	— 8,6	1,2	— 4,2	12,9	2,0	18,1	— 2,1	17,8	2,0	19,1
16	0,5	12,7	— 8,5	6,8	— 4,1	10,9	5,5	13,1	3,1	12,5	8,9	19,8
17	4,1	15,3	4,6	11,0	— 0,2	10,8	1,2	14,0	— 2,0	11,9	5,9	18,0
18	11,9	14,1	6,2	10,8	— 2,6	15,5	5,7	19,8	— 3,8	13,9	8,7	19,1
19	4,3	13,1	7,5	13,2	— 4,0	18,7	0,8	15,4	— 1,8	16,8	3,8	16,9
20	4,5	12,0	4,1	10,8	— 3,9	15,8	1,6	15,2	2,1	19,9	10,0	23,1
21	6,1	10,1	3,2	11,2	0,8	15,8	4,8	20,9	8,4	18,2	5,5	30,1
22	6,3	11,8	3,5	10,7	4,0	21,3	2,0	23,1	7,4	14,1	11,4	30,8
23	— 0,2	10,6	2,7	10,5	3,5	14,5	5,8	20,7	6,9	12,8	10,1	29,1
24	— 0,1	10,1	1,6	10,0	— 0,7	13,9	8,3	22,1	3,0	14,2	13,3	30,0
25	— 0,4	9,7	1,4	11,1	3,7	10,1	8,9	20,8	3,4	14,8	16,5	33,5
26	— 0,8	11,5	1,0	10,5	3,3	10,5	10,5	20,0	5,5	19,0	15,2	31,8
27	4,9	11,7	— 3,2	11,0	5,3	17,3	7,7	14,8	8,5	13,3	16,9	29,1
28	5,6	12,8	— 4,4	14,9	9,5	15,1	8,5	16,7	9,8	21,8	15,0	26,1
29	8,0	11,2	— 3,1	12,5	—	—	6,4	17,1	10,5	19,7	14,9	21,2
30	4,4	9,8	— 3,9	11,7	—	—	4,9	15,7	10,0	17,1	11,5	16,9
31	2,3	9,7	— 3,1	14,0	—	—	5,8	16,1	—	—	13,0	20,0
Moyenne	1,96	10,21	1,38	11,22	— 0,26	14,19	3,88	16,32	3,13	16,09	9,33	21,77

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques d'Arcachon.

Jours	Juin 1902		Juillet 1902		Août 1902	Septembre 1902	Octobre 1902	Novembre 1902	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	
1	9.8	25.1	13.4	30.0	14.6	28.3	12.6	26.6	3.0
2	9.1	23.8	14.6	26.6	13.4	24.5	17.6	28.8	3.3
3	11.8	22.8	15.4	29.8	13.2	23.0	19.5	24.8	10.8
4	13.1	24.7	15.6	30.8	12.4	27.1	14.6	19.3	2.2
5	12.9	24.6	17.1	35.6	17.1	25.5	14.6	19.3	2.3
6	11.8	21.6	18.6	25.4	16.4	26.6	14.4	18.8	18.9
7	11.4	20.8	18.2	24.8	17.9	24.6	13.1	15.6	8.6
8	11.6	18.6	18.6	26.3	17.0	23.1	15.0	15.6	11.3
9	10.4	18.2	18.6	27.6	14.8	23.6	15.3	25.6	14.8
10	9.3	18.7	19.4	25.4	13.2	23.8	13.6	24.0	5.3
11	9.6	23.1	15.6	24.0	14.8	22.8	13.2	22.8	3.6
12	13.4	24.3	13.4	28.0	13.8	23.8	8.6	18.2	17.8
13	10.4	18.8	17.4	32.8	15.9	22.6	13.8	20.8	11.6
14	9.6	18.6	19.4	32.8	15.9	22.6	14.4	19.6	14.5
15	9.4	17.7	18.0	27.4	13.6	20.5	10.6	6.4	8.3
16	8.8	16.8	17.2	31.8	16.6	20.8	11.6	6.9	15.8
17	11.1	18.9	18.6	32.8	15.4	25.1	10.8	15.8	7.2
18	10.6	22.4	14.8	28.6	12.4	22.8	11.8	19.9	11.6
19	13.4	26.6	15.4	24.8	17.4	26.6	10.4	17.6	3.4
20	10.8	25.3	15.8	25.0	15.2	23.7	11.0	26.6	1.6
21	14.4	21.8	14.8	22.0	14.4	24.3	12.9	28.7	4.8
22	10.6	20.1	11.1	23.6	12.6	24.9	12.4	23.4	1.1
23	15.4	25.8	14.4	25.3	12.1	26.8	16.3	21.4	6.7
24	15.1	23.8	13.4	21.3	11.9	24.6	14.7	15.5	0.8
25	16.6	34.1	24.8	24.8	11.6	22.3	11.2	19.5	1.1
26	14.6	26.8	15.1	29.8	15.4	21.5	12.6	20.4	9.1
27	17.2	33.0	18.4	25.4	12.6	26.2	12.1	19.1	3.3
28	13.8	21.8	13.8	23.8	13.1	30.8	10.4	19.2	7.6
29	13.6	26.6	11.8	24.8	15.6	19.2	9.2	14.6	4.4
30	14.6	24.7	13.2	25.8	14.8	21.0	8.6	19.6	6.5
31	»	»	13.1	26.8	13.6	24.1	»	»	7.6
Moyenne	13.07	23.53	15.41	26.47	14.45	25.03	13.96	22.19	8.49

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques d'Arcachon (Suite).

	Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903	Mars 1903	Avril 1903	Mai 1903
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	5.4	15.2	1.6	10.3	5.4	10.6	2.6	16.5
2	9.4	13.8	1.1	12.5	1.4	2.5	7.9	14.8
3	7.1	12.3	0.6	13.9	2.2	9.2	12.8	5.7
4	4.3	6.5	8.4	15.5	3.3	9.8	7.6	13.0
5	1.6	0.0	4.8	15.1	1.2	11.4	9.5	16.8
6	—	—	2.2	14.8	—	10.6	12.4	9.3
7	—	—	0.0	7.6	14.5	9.1	12.9	15.3
8	—	—	0.0	4.6	11.4	12.8	4.6	16.3
9	—	—	2.9	4.6	11.7	10.8	9.1	14.8
10	—	—	3.8	4.9	12.7	11.1	3.4	13.8
11	0.0	3.0	4.3	14.3	2.6	12.8	2.4	10.6
12	3.4	9.8	3.7	13.8	0.3	14.8	2.2	11.4
13	5.1	12.6	2.6	6.3	1.4	10.7	0.0	13.8
14	3.6	9.6	—	0.0	3.4	10.6	2.6	17.5
15	2.2	11.4	—	0.5	0.8	9.8	3.6	16.5
16	2.3	11.3	—	0.0	—	9.8	5.2	13.9
17	1.8	13.6	—	3.3	6.2	4.3	9.1	14.8
18	16.6	14.1	3.4	9.7	1.4	9.0	2.6	13.6
19	10.9	13.6	5.2	10.3	—	2.8	12.6	13.6
20	6.6	12.6	3.6	12.4	—	1.5	15.1	12.8
21	6.2	11.4	4.9	9.3	2.0	13.4	1.6	16.1
22	5.6	11.6	1.6	8.5	4.8	20.8	2.7	19.8
23	4.8	11.1	—	0.4	8.0	18.6	2.4	20.1
24	0.4	8.8	1.6	9.1	9.6	13.4	5.1	22.3
25	—	1.2	9.4	1.2	9.3	1.6	13.3	8.6
26	0.0	9.8	0.0	10.0	3.9	15.2	7.6	25.3
27	4.4	11.6	0.4	10.1	8.0	14.5	4.4	15.6
28	6.6	10.8	—	0.0	7.0	14.6	7.4	13.8
29	2.4	10.8	3.3	12.0	7.0	18.6	6.6	14.8
30	7.4	12.6	—	0.6	12.7	10.9	9.3	16.8
31	7.6	11.5	—	9.8	»	»	6.3	15.0
1	5.2	7.7	—	2.8	»	»	5.1	14.8
2	1.9	8.6	—	1.8	»	»	4.6	14.5
3	3.07	9.31	1.89	10.24	2.45	12.35	4.85	15.34
Moyenne	7.92	13.35	7.92	13.35	7.92	13.35	7.92	13.35

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques de Talence.

## Observations thermométriques de Talence (Suite).

Date	Juin 1902		Juillet 1902		Août 1902		Septembre 1902		Octobre 1902		Novembre 1902		Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	7,5	16,9	12,7	25,8	11,7	25,7	15,6	37,4	2,7	11,5	- 0,4	13,1	1,5	13,2	0,5	10,5	4,1	11,7	0,2	17,2	0,4	18,1	6,5	16,7
2	9,3	23,7	13,6	28,8	15,7	28,7	16,8	37,4	5,3	16,2	- 1,3	18,2	3,8	14,6	3,2	13,3	0,1	7,5	2,8	13,6	8,3	14,0	5,4	19,3
3	13,4	23,9	14,7	29,0	8,7	24,7	16,7	37,5	2,1	17,8	- 1,7	15,8	6,3	12,7	8,7	13,8	- 3,3	8,1	7,7	13,2	3,3	12,0	10,7	20,8
4	9,5	24,3	11,9	30,3	9,0	31,3	15,8	31,8	5,8	14,4	1,3	17,7	4,0	3,3	7,1	17,7	4,3	10,4	3,4	16,4	9,6	15,1	7,0	19,9
5	11,5	23,6	11,2	32,8	13,5	30,4	11,6	32,4	8,5	13,2	10,1	22,5	- 3,2	- 1,0	3,3	15,2	- 4,2	10,3	5,7	14,3	7,8	17,2	9,3	19,6
6	8,6	22,4	17,0	29,3	13,5	31,8	11,6	32,1	5,8	18,4	8,1	21,8	- 6,3	- 2,1	1,7	14,8	- 2,2	13,6	7,8	12,1	1,4	16,6	7,3	18,6
7	8,7	21,4	17,0	31,6	16,3	25,3	9,8	23,8	4,3	17,3	9,6	14,8	- 6,8	0,0	2,3	13,7	0,7	16,3	1,3	13,4	1,1	21,4	3,8	19,8
8	10,3	19,2	17,8	32,7	16,2	24,6	11,2	26,8	12,0	24,2	4,3	16,3	- 6,7	2,3	5,5	10,3	- 1,2	15,7	0,6	11,4	7,2	16,4	6,5	19,9
9	8,3	18,1	18,9	32,7	11,5	26,0	16,5	26,3	10,8	22,8	9,9	15,3	- 3,3	3,2	6,8	14,3	- 1,3	15,3	- 2,3	11,4	0,3	15,5	7,2	18,7
10	7,0	19,3	20,0	27,6	9,4	26,2	12,4	27,3	9,2	23,3	3,0	10,8	- 0,5	5,2	6,8	17,3	- 0,4	14,6	0,7	13,7	- 0,5	15,7	8,0	17,5
11	10,3	»	13,3	24,2	10,3	25,7	12,9	25,8	9,0	19,6	4,9	19,4	2,4	10,2	4,9	11,7	- 1,1	14,9	- 1,0	11,6	- 0,8	17,7	5,9	17,2
12	10,4	»	9,9	27,7	11,3	25,6	15,4	22,7	12,2	18,8	5,6	17,0	4,7	13,3	3,3	4,8	- 2,2	13,8	0,9	15,6	3,0	17,9	4,8	16,7
13	9,6	»	17,0	32,7	11,0	26,3	14,6	21,2	5,6	19,7	5,8	19,6	2,6	11,4	- 3,4	- 1,3	- 1,0	10,0	2,4	18,0	4,8	14,8	3,7	16,3
14	6,5	»	19,3	34,6	9,9	25,5	7,9	21,9	3,2	19,7	4,3	12,6	2,6	12,8	- 3,6	- 1,6	- 1,8	11,3	4,1	18,2	9,5	14,9	2,3	15,3
15	6,9	»	18,3	27,7	9,1	23,8	9,6	22,8	3,7	20,8	3,2	9,7	0,0	11,4	- 9,1	- 0,8	- 4,0	8,1	5,0	15,3	- 1,9	16,3	4,1	19,2
16	6,7	»	17,3	25,7	13,2	36,8	8,5	23,3	11,6	15,9	6,2	11,8	0,0	13,7	- 5,6	- 5,7	- 1,6	10,0	4,3	12,0	2,8	12,9	7,2	20,7
17	7,8	»	16,9	26,3	14,5	27,1	12,3	21,6	5,0	16,7	4,8	7,3	11,3	16,3	2,7	10,3	0,8	10,4	- 0,3	15,0	- 2,4	11,4	6,4	16,6
18	7,1	»	12,9	26,5	11,2	24,8	9,2	23,0	7,5	17,6	- 1,7	3,7	3,3	12,8	6,1	10,3	- 0,3	12,8	4,6	14,2	- 3,7	12,2	9,3	18,1
19	9,3	»	16,7	26,7	16,3	31,3	9,7	23,7	7,9	17,0	4,7	10,7	6,9	11,3	- 1,0	10,9	- 0,6	10,6	2,8	17,5	6,7	16,0	12,0	30,4
20	9,7	»	12,3	22,8	11,7	26,3	6,7	23,2	9,0	20,7	- 6,4	3,4	5,3	11,0	2,2	10,4	- 0,3	16,7	1,5	16,0	2,1	21,4	9,8	25,2
21	11,3	»	12,7	24,8	11,2	26,3	9,7	23,8	11,2	20,8	- 1,0	8,1	8,0	10,4	- 2,8	9,6	2,5	22,0	5,4	22,7	6,7	16,0	12,0	30,4
22	6,9	»	18,3	29,9	9,7	27,8	9,6	23,6	7,3	17,7	0,8	8,4	- 1,2	8,8	0,8	9,6	2,3	15,1	7,0	24,6	2,3	13,8	11,0	22,3
23	12,3	»	16,7	35,7	10,1	31,3	14,5	22,6	7,3	16,8	1,8	15,9	- 1,8	7,8	- 0,6	9,7	- 1,0	15,3	8,2	19,4	6,3	14,8	11,0	31,0
24	13,4	»	12,0	29,7	14,2	25,6	11,2	20,8	- 0,5	15,2	7,0	12,7	- 1,8	7,8	- 1,6	9,7	- 1,0	13,8	9,7	22,3	0,7	13,3	16,8	32,2
25	13,2	»	17,2	23,8	13,9	27,2	10,0	21,8	- 1,4	15,2	9,3	14,5	- 1,6	11,4	- 2,1	9,5	6,3	16,4	6,8	21,7	4,3	22,7	14,9	30,7
26	13,7	»	9,5	24,3	8,9	26,3	12,0	20,8	0,7	18,2	2,9	12,5	4,3	11,4	- 2,1	13,7	4,9	20,7	7,6	14,6	6,7	13,5	16,7	27,7
27	12,0	»	8,7	25,0	11,9	30,8	9,9	19,2	4,9	17,5	13,8	14,8	4,7	12,7	- 2,2	14,7	9,3	13,3	8,0	16,8	8,6	21,7	14,5	27,7
28	17,0	»	10,0	27,2	16,8	41,8	7,0	17,2	4,5	15,6	6,8	10,1	7,7	10,8	- 1,0	9,4	»	»	»	»	9,8	20,7	12,9	47,8
29	12,7	»	10,2	30,3	15,3	23,7	4,0	15,8	1,3	8,0	7,5	14,1	3,5	7,7	- 3,7	2,8	»	»	2,1	15,6	9,7	18,8	4,0	24,8
30	15,2	»	12,0	25,8	11,2	25,6	»	»	- 0,7	11,7	»	»	1,3	5,3	- 8,5	11,8	»	»	4,4	13,7	»	»	19,5	30,7
31	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Moyenne	10,18	»	14,56	27,71	13,66	27,40	11,36	23,70	5,80	17,58	5,87	13,10	1,91	9,31	0,37	10,59	- 0,02	9,50	4,30	16,35	3,14	16,37	8,79	22,06

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques de Bordeaux (Direction des Eaux).

Dates	Juin 1902		Juillet 1902		Août 1902		Septembre 1902		Octobre 1902		Novembre 1902	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	11,7	19,0	14,9	20,1	15,7	27,2	11,7	38,5	5,3	11,6	1,7	12,1
2	10,6	24,6	15,9	26,8	14,9	26,7	16,7	32,6	9,3	11,6	4,8	12,8
3	14,3	24,6	15,4	28,0	10,6	26,0	16,9	28,1	3,3	17,4	0,0	16,6
4	11,3	21,6	13,9	35,3	11,4	32,0	15,4	21,6	9,3	13,8	4,1	20,1
5	13,1	21,9	14,3	29,6	17,2	29,6	12,9	22,8	10,2	18,3	12,0	22,0
6	20,3	22,1	14,9	29,7	16,9	32,0	12,9	22,8	7,6	17,4	11,4	20,6
7	10,7	21,1	18,1	32,0	17,8	25,3	11,4	24,6	5,5	18,4	10,4	14,6
8	10,9	17,8	19,3	35,8	12,9	24,1	15,9	28,1	8,6	23,8	6,0	16,1
9	9,0	18,6	18,8	32,6	12,7	26,2	16,9	26,8	16,5	23,1	6,9	15,3
10	8,4	20,5	10,9	28,7	10,9	27,1	12,9	26,6	12,9	23,1	4,3	13,5
11	10,5	20,8	15,0	23,5	12,3	21,4	14,5	26,6	11,6	20,1	5,9	19,1
12	12,1	23,4	12,0	29,6	12,4	24,1	11,5	22,6	9,9	18,6	12,4	16,5
13	10,8	19,5	15,7	34,4	19,4	25,5	14,4	20,6	6,4	19,6	7,4	18,8
14	8,2	18,6	18,7	35,2	10,9	25,9	10,1	22,1	4,8	19,7	5,4	13,6
15	8,9	17,6	19,2	28,4	11,3	26,7	11,5	23,1	8,0	18,7	5,7	9,8
16	8,4	17,6	17,5	26,2	16,3	36,3	10,7	23,1	9,7	20,7	6,9	12,1
17	6,4	19,6	17,3	27,0	16,3	29,1	14,1	22,1	6,5	16,8	3,9	6,6
18	8,4	26,1	14,4	26,6	14,0	33,9	10,5	23,1	8,0	16,8	1,9	4,6
19	10,4	26,1	16,5	26,6	15,9	29,8	7,9	24,5	8,9	19,6	1,9	2,8
20	10,0	21,1	13,7	22,7	16,0	28,4	8,5	29,1	9,9	20,7	3,7	8,1
21	12,4	23,1	13,7	21,7	13,8	26,2	8,4	28,9	10,4	19,8	—	—
22	10,6	28,5	10,0	29,6	11,0	25,0	12,1	39,4	8,9	17,8	2,0	10,0
23	13,3	31,4	9,4	26,2	12,5	32,0	16,4	22,8	8,3	17,1	3,4	15,5
24	16,0	32,7	12,9	29,1	11,4	28,5	11,6	21,9	4,9	16,3	3,9	10,9
25	18,4	32,6	14,0	29,1	14,7	32,0	12,3	21,6	2,8	15,4	7,4	12,7
26	16,3	27,5	18,6	29,6	14,6	26,2	11,4	22,1	1,1	14,0	9,7	14,4
27	13,4	30,6	14,9	29,4	11,3	27,8	11,8	20,5	4,4	17,6	6,4	18,6
28	18,3	25,4	11,4	24,6	15,9	31,7	9,4	19,6	6,4	16,1	5,4	13,9
29	10,4	23,0	30,4	27,6	17,4	21,0	0,4	17,5	6,4	13,7	7,4	10,6
30	17,9	23,6	12,4	30,4	15,9	24,0	2,5	16,5	1,1	8,8	8,4	13,6
31	»	»	14,4	26,1	12,8	26,0	»	»	1,3	10,8	»	»
Moyenne	11,83	23,87	15,10	28,29	13,31	27,83	12,24	24,01	7,33	17,40	5,30	13,11

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques de Bordeaux (Direction des Eaux) (Suite).

	Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	4,4	13,1	2,3	9,6	4,4	11,6	3,5	16,0	2,3	19,1	7,9	17,0
2	5,7	14,1	2,3	11,8	1,2	7,4	5,5	12,0	3,5	14,6	6,5	19,7
3	7,4	12,6	5,1	13,9	— 0,9	9,3	4,1	13,9	3,5	13,9	11,0	21,0
4	3,5	5,1	9,3	17,6	— 0,9	9,3	6,0	17,1	2,8	16,3	9,0	20,0
5	— 1,9	— 1,0	5,4	15,5	— 1,1	11,1	9,9	14,8	5,4	17,4	10,0	20,0
6	— 4,6	— 2,1	6,5	14,6	— 0,4	13,6	8,7	12,8	4,5	17,3	8,5	19,0
7	—	—	6,3	14,1	3,2	16,6	1,2	13,2	3,4	22,0	7,0	21,0
8	—	—	6,9	2,7	7,1	11,0	1,1	15,6	2,4	12,5	8,5	20,5
9	—	—	5,8	4,1	7,8	14,6	0,9	16,1	—	0,8	11,9	3,0
10	—	—	7,6	8,8	11,1	1,9	13,9	1,5	15,0	3,0	16,2	9,4
11	3,7	13,4	6,7	11,6	— 0,9	13,9	1,5	15,0	3,5	18,5	7,1	18,4
12	5,4	12,4	3,4	6,6	— 0,9	14,9	0,5	16,2	2,0	17,9	6,4	16,8
13	5,4	11,3	— 3,4	1,4	1,0	10,8	4,3	19,2	0,2	16,5	5,4	17,9
14	4,4	12,6	— 3,1	0,1	0,0	11,4	7,0	18,0	3,0	15,0	5,0	19,2
15	1,9	11,9	— 6,7	0,4	— 2,3	7,6	7,0	14,0	0,8	17,4	3,9	20,0
16	1,9	13,2	— 5,4	5,1	1,4	10,9	6,0	14,0	4,5	13,2	9,5	19,6
17	6,5	9,9	15,1	4,9	10,6	0,4	10,8	5,0	15,8	— 1,0	12,8	6,7
18	4,5	14,1	6,9	10,7	0,0	13,5	6,5	15,0	— 1,5	13,5	6,5	19,4
19	5,6	12,8	6,6	12,9	— 1,7	13,0	3,5	15,2	—	2,0	9,7	29,5
20	7,3	11,8	3,9	11,1	0,5	16,4	0,2	17,5	2,7	22,2	11,2	26,0
21	7,4	10,8	1,2	11,5	6,4	21,1	1,8	22,0	8,4	16,7	9,0	29,5
22	9,8	10,1	— 0,9	6,4	6,6	21,4	7,3	24,0	7,2	16,0	13,0	31,0
23	—	—	0,0	10,0	6,9	14,9	7,4	25,0	4,7	13,8	13,0	31,0
24	—	—	0,6	9,4	10,2	1,9	14,1	8,6	20,0	4,2	13,5	32,0
25	0,0	5,6	1,1	10,0	4,7	14,1	10,7	23,7	3,8	19,5	12,8	34,0
26	0,0	11,4	— 1,2	8,0	8,9	16,4	8,8	22,2	2,8	20,9	16,0	32,0
27	5,4	12,1	— 1,6	15,3	8,1	20,6	7,8	15,0	8,0	17,5	17,5	29,5
28	6,4	12,4	0,9	14,1	10,3	15,1	8,0	17,3	9,1	21,9	15,6	27,1
29	7,9	16,6	0,4	10,5	»	»	7,2	17,5	10,8	19,5	15,4	26,9
30	4,3	8,6	— 3,3	2,1	»	»	4,3	16,1	10,4	29,5	14,1	18,5
31	2,2	8,6	1,0	12,0	»	»	6,7	16,5	»	»	16,0	21,2
Moyenne	2,98	9,40	2,34	10,27	2,03	14,07	5,31	16,53	4,38	17,03	10,34	22,94

COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

Observations thermométriques de Floirac (Observatoire).

Date	Juin 1903		Juillet 1902		Août 1902		Septembre 1902		Octobre 1902		Novembre 1902		Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	10.5	15.1	13.9	27.9	15.2	25.8	15.4	28.2	4.8	9.8	2.8	12.3	4.9	12.2	5.2	9.6	2.7	11.4	3.1	15.3	3.7	17.7	7.4	16.4
2	10.0	20.3	14.7	27.7	13.0	25.0	19.5	30.9	7.6	15.1	4.1	12.5	7.6	13.6	6.9	12.0	0.8	7.0	4.2	12.4	6.2	13.8	6.3	18.5
3	13.6	24.0	16.0	30.1	10.7	24.1	17.5	27.6	2.6	17.2	0.1	15.1	5.6	12.2	9.1	13.1	— 4.4	8.2	7.4	13.3	3.7	14.0	11.0	20.1
4	13.2	22.7	14.6	29.1	12.3	31.2	14.5	20.3	9.0	13.4	0.7	15.6	4.5	6.2	9.5	16.5	— 4.4	10.9	6.5	16.7	2.0	14.9	9.2	19.4
5	11.7	23.4	17.5	29.7	16.3	33.1	13.1	21.9	9.7	13.1	13.6	21.2	— 6.0	— 1.9	7.2	15.5	— 3.3	10.2	8.7	13.9	6.7	16.3	9.3	19.2
6	10.3	22.3	18.3	30.0	17.2	31.3	12.7	22.0	7.7	16.9	12.9	20.2	— 6.5	— 3.8	4.7	14.5	— 2.9	13.1	8.3	11.9	4.4	16.3	8.3	17.9
7	10.3	21.0	17.7	31.1	17.5	26.2	12.3	23.0	5.3	17.2	8.0	14.1	— 7.7	— 7.7	0.5	14.9	3.9	15.5	0.8	13.3	5.0	20.3	7.1	20.0
8	10.4	17.9	19.1	33.9	14.5	23.9	15.9	26.2	12.3	25.5	6.4	14.4	— 7.2	— 3.8	8.1	12.7	3.7	15.0	9.5	10.7	7.0	16.1	8.7	19.3
9	9.0	16.7	18.4	33.1	13.2	25.8	16.7	25.0	11.4	22.2	4.9	9.8	0.9	7.1	9.3	16.3	3.0	11.2	1.9	8.3	3.2	14.8	6.3	18.4
10	9.3	20.8	14.4	32.7	11.9	22.0	13.3	26.0	10.7	20.6	8.3	18.4	5.0	13.1	4.0	11.9	0.0	14.9	1.6	11.7	3.3	16.9	6.3	17.2
11	12.4	22.2	12.3	26.8	12.0	23.2	15.1	21.6	10.2	15.1	8.3	18.4	6.9	12.6	— 1.0	5.4	— 0.5	13.7	— 0.6	13.4	5.8	14.5	5.1	16.3
12	9.5	17.8	16.6	22.2	12.6	23.8	12.5	19.9	6.8	13.8	9.0	16.9	7.0	10.7	— 4.3	— 0.5	2.3	9.9	4.8	18.3	5.8	14.3	5.2	17.0
13	8.7	18.3	19.6	34.0	12.2	25.5	10.2	21.6	5.2	19.2	5.6	12.6	3.8	12.2	— 6.1	— 1.1	0.5	10.9	6.8	17.7	3.1	13.4	5.0	18.9
14	8.1	17.7	17.3	37.8	10.9	29.4	11.7	21.5	8.2	19.9	5.0	9.0	0.1	10.8	— 8.1	0.7	— 1.7	7.6	6.1	14.2	2.2	16.3	6.1	19.1
15	8.4	17.3	17.1	36.2	17.8	35.7	11.5	23.2	9.3	16.4	6.0	10.8	3.0	12.0	— 4.7	6.6	4.7	9.7	3.2	12.8	2.8	11.9	8.8	19.3
16	8.3	17.5	16.1	36.0	15.5	27.2	13.0	20.9	6.9	16.5	3.3	7.6	11.8	15.0	— 2.9	10.1	0.1	9.7	1.8	15.2	— 0.8	10.7	7.9	16.0
17	9.4	19.8	15.5	36.0	15.5	27.2	13.0	20.9	6.9	16.5	3.3	7.6	11.8	15.0	— 2.9	10.1	0.1	9.7	1.8	15.2	— 0.8	10.7	7.9	16.0
18	8.0	22.4	13.9	35.2	13.3	34.3	11.6	22.1	9.5	16.7	— 1.4	4.0	7.2	12.0	5.8	12.7	0.6	16.0	0.4	14.5	— 0.5	14.6	6.9	22.6
19	12.3	30.2	14.7	35.6	13.9	30.6	8.6	22.5	9.5	18.1	— 2.1	8.0	7.2	11.0	2.0	10.1	5.8	20.9	5.9	21.6	2.0	20.6	11.0	34.2
20	11.3	32.2	13.1	22.0	15.4	26.9	10.8	27.4	10.9	19.5	— 1.4	3.2	7.2	10.0	2.0	10.1	4.2	20.9	5.9	21.6	2.0	20.6	11.0	34.2
21	12.3	32.2	12.8	21.0	15.0	25.5	14.0	27.7	11.3	20.7	0.3	7.0	7.3	10.0	2.0	10.1	5.8	20.9	5.9	21.6	2.0	20.6	11.0	34.2
22	11.9	26.8	10.9	32.2	12.1	27.8	14.7	28.7	9.0	17.2	4.3	10.1	8.9	14.3	— 9.0	7.8	4.1	21.0	7.4	30.9	6.4	15.5	15.8	29.9
23	15.0	30.7	9.5	25.3	14.3	30.9	12.6	24.3	8.1	15.2	7.0	14.9	— 9.6	4.2	— 0.0	10.1	4.0	14.4	8.0	23.0	4.5	13.8	12.1	29.6
24	17.0	33.7	13.2	21.0	14.8	27.0	12.1	21.5	5.7	14.9	0.6	16.9	— 1.2	6.0	0.9	9.4	5.2	14.8	9.5	18.1	3.4	13.1	11.5	30.9
25	18.1	30.9	13.1	27.1	13.9	23.0	11.8	20.2	5.7	15.1	8.8	12.9	— 1.2	6.0	0.9	9.4	5.2	14.8	9.5	18.1	3.4	13.1	11.5	30.9
26	15.3	27.0	13.6	28.1	13.8	25.2	10.8	21.0	4.4	12.7	7.8	14.3	6.9	10.3	— 2.7	10.7	8.2	16.2	8.8	30.9	5.1	15.1	15.8	27.5
27	14.6	28.6	13.3	23.3	10.3	26.0	11.3	19.7	4.4	17.0	6.2	13.9	6.9	10.3	— 2.7	10.7	8.2	16.2	8.8	30.9	5.1	15.1	15.8	27.5
28	14.1	23.6	12.0	24.1	14.8	31.0	8.4	18.1	7.0	15.8	6.0	13.9	7.0	11.7	4.4	12.8	4.8	15.5	7.5	17.1	8.7	20.5	14.6	29.5
29	13.0	26.6	11.9	26.3	14.8	21.9	5.7	15.6	6.0	16.7	8.4	9.7	5.9	9.9	— 1.0	11.8	»	»	»	»	»	»	»	»
30	15.1	33.0	14.0	29.4	15.1	23.3	3.0	16.1	1.1	7.6	13.9	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
31	»	»	13.7	25.6	13.1	24.2	»	»	2.6	10.2	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Moyenne	11.77	27.79	14.93	27.25	13.86	26.87	12.35	23.92	7.40	16.25	5.31	12.56	2.44	5.22	3.18	10.29	2.48	12.48	4.89	15.61	4.36	15.72	9.84	21.61

COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

Observations thermométriques de Floirac (Observatoire). (Suite).

Date	Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	7.0	12.2	3.2	9.6	2.7	11.4	3.1	15.3	3.7	17.7	7.4	16.4
2	7.0	15.6	6.3	16.0	0.8	7.0	4.2	12.4	6.2	13.8	6.3	18.5
3	5.6	12.2	0.1	13.1	-0.1	8.2	7.4	13.3	2.7	14.0	11.0	20.1
4	-4.5	6.1	9.5	16.5	-1.4	10.9	6.5	16.7	2.0	14.9	9.2	19.4
5	-6.0	-1.9	7.2	15.5	-3.3	10.2	8.7	13.9	6.7	16.3	9.3	19.2
6	-6.5	-3.8	4.7	14.5	-2.9	13.1	5.3	11.9	4.4	16.3	8.3	17.9
7	-7.7	-0.5	7.1	14.9	3.9	15.5	0.8	13.3	5.0	20.3	7.1	20.0
8	-7.2	1.8	8.1	13.7	3.7	15.0	2.5	10.7	7.0	16.1	8.7	19.3
9	-2.8	2.6	8.8	14.0	1.6	16.1	1.7	11.0	4.1	15.0	7.6	17.7
10	5.9	7.1	9.5	16.3	3.0	14.2	1.9	8.3	3.2	14.8	6.3	18.4
11	5.0	13.4	4.0	11.9	0.0	11.9	1.6	11.7	3.3	16.9	6.3	17.2
12	7.9	12.6	-1.0	5.4	-0.3	13.7	-0.6	15.4	6.8	16.9	6.1	16.3
13	6.0	10.7	-4.8	-0.5	2.3	9.9	4.8	18.3	5.8	14.5	5.2	17.0
14	3.5	13.2	-6.1	-1.1	0.5	10.9	6.8	17.7	3.1	13.4	5.0	18.9
15	0.4	10.8	-8.1	0.7	-1.7	7.6	6.1	14.2	2.2	16.3	6.1	19.1
16	3.0	12.0	-4.7	6.6	4.7	9.7	3.2	12.8	2.8	11.9	7.9	16.0
17	11.3	15.0	9.9	10.1	0.1	9.7	1.8	15.2	-0.8	10.7	9.1	17.4
18	5.8	12.5	6.4	9.7	0.2	12.1	4.6	13.8	-0.2	11.3	9.1	17.4
19	5.8	12.0	5.8	12.7	0.6	16.0	1.4	14.5	-0.5	14.6	6.9	28.6
20	7.2	11.0	4.8	10.3	1.2	15.5	2.8	16.0	2.0	20.6	11.0	24.2
21	3.9	11.3	2.0	7.8	7.1	21.0	7.4	20.9	6.9	14.7	9.5	26.4
22	-0.7	9.5	-0.7	9.2	4.0	14.4	8.0	22.9	4.5	13.8	13.8	29.9
23	-2.6	4.5	0.0	10.1	1.0	15.6	8.5	19.1	3.4	13.1	11.5	30.9
24	-1.8	6.6	0.9	9.4	5.2	15.8	9.9	21.7	3.4	15.8	19.1	31.9
25	-0.7	10.9	2.7	10.7	16.2	16.2	8.8	20.9	4.1	20.2	15.1	20.8
26	6.9	10.3	0.0	15.6	6.7	15.5	6.6	13.3	7.5	13.1	15.8	27.2
27	7.0	11.7	1.4	12.8	4.8	15.5	7.5	17.1	8.7	20.5	14.4	22.5
28	5.9	9.9	-1.6	11.8	»	»	7.5	16.8	9.7	19.7	13.5	24.5
29	5.0	7.6	-3.8	5.1	»	»	5.2	12.4	8.5	17.3	13.8	17.2
30	1.3	8.8	-0.3	11.4	»	»	5.7	16.6	»	»	12.6	20.5
31	3.84	5.82	3.18	10.29	3.48	13.48	4.89	15.61	4.36	15.73	9.84	21.61

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques de Sallebeuf (Chen Vaquey).

Date	Juin 1902		Juillet 1902		Août 1902		Septembre 1902		Octobre 1902		Novembre 1902		Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903		
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	
1	11.4	18.8	13.8	26.0	15.4	26.2	15.4	26.2	4.8	10.0	1.4	12.0	5.0	11.8	1.8	8.2	6.0	10.2	2.0	14.8	2.8	17.0	6.8	16.0	
2	9.8	22.8	15.0	26.8	14.4	23.4	18.6	29.6	7.2	13.8	0.6	13.6	8.4	12.8	0.6	11.8	0.6	7.0	3.8	12.2	7.6	13.0	5.6	18.4	
3	14.8	22.8	14.8	26.8	11.2	22.4	18.6	26.0	4.8	13.8	1.0	15.2	6.8	11.6	9.0	14.8	1.2	7.2	7.2	12.6	2.4	12.6	10.4	18.4	
4	11.4	22.8	14.0	26.2	11.4	28.8	15.2	19.8	8.2	18.0	5.2	20.2	4.4	6.0	9.4	15.2	0.6	10.0	6.0	15.2	4.0	18.8	9.0	19.0	
5	11.4	21.8	16.4	28.2	11.4	28.8	15.2	19.8	8.2	18.0	5.2	21.8	6.6	2.8	6.4	15.0	0.2	10.2	9.0	15.0	7.8	16.0	8.8	19.2	
6	10.4	19.8	20.4	28.8	15.4	30.4	12.6	20.2	7.6	14.4	10.6	19.0	—	6.6	3.0	4.4	13.0	0.2	12.4	7.0	12.0	3.8	16.0	7.8	18.0
7	10.6	19.8	18.0	29.6	17.4	24.0	11.2	22.0	2.8	15.6	9.6	14.0	—	8.2	1.2	6.6	13.6	2.8	14.8	1.4	11.2	4.2	20.0	7.0	19.2
8	10.8	16.6	19.0	32.0	17.2	28.4	14.4	25.0	11.2	22.2	9.6	13.6	—	8.4	1.2	6.6	13.6	1.8	14.4	2.0	10.4	7.6	15.6	8.6	20.2
9	9.4	15.6	19.0	32.0	13.6	24.4	15.8	22.8	15.6	22.0	9.4	13.6	—	5.0	3.0	7.6	13.4	1.4	14.8	0.4	12.0	3.4	14.2	6.8	18.0
10	9.0	17.8	19.6	26.0	13.4	25.0	13.0	24.4	10.6	21.4	4.0	9.6	—	8.8	4.6	8.6	15.2	4.8	13.4	0.8	7.6	1.8	14.8	18.4	38.2
11	10.2	18.6	13.8	22.8	11.6	20.4	14.8	24.2	11.4	18.6	7.0	18.0	2.4	12.6	5.4	10.0	0.6	11.0	0.4	11.0	2.0	16.4	6.6	17.0	
12	11.6	21.0	10.6	26.2	11.8	21.2	15.1	20.6	11.8	17.4	11.8	16.6	4.4	12.0	2.8	4.4	10.0	0.4	13.0	0.2	15.2	5.2	16.4	6.0	15.4
13	10.6	17.6	14.4	30.8	12.6	21.4	11.0	19.2	7.4	18.0	7.4	15.6	6.0	10.4	4.6	2.2	9.0	0.6	13.0	0.2	15.2	5.2	16.4	6.0	15.4
14	8.4	17.4	19.4	32.2	11.6	23.2	10.4	19.6	6.6	17.6	4.4	12.8	2.0	10.4	4.4	2.0	9.0	0.4	10.0	5.6	17.4	2.2	13.2	5.6	17.0
15	8.0	16.4	18.8	26.4	12.8	27.2	11.4	20.6	8.6	18.2	4.0	9.4	2.8	10.4	8.4	1.0	0.4	6.6	5.6	13.4	0.4	15.2	6.6	17.6	
16	7.8	16.4	17.0	25.0	16.0	23.8	12.4	21.0	12.6	15.4	8.0	10.8	2.8	11.4	11.2	5.6	4.6	9.6	5.6	11.2	0.4	15.2	6.6	17.6	
17	9.4	17.8	16.8	24.6	13.8	32.0	13.6	20.2	6.8	15.4	3.4	7.2	9.6	14.0	3.2	9.8	0.4	10.0	5.6	13.4	1.4	10.0	8.0	15.6	
18	9.4	21.2	14.4	24.6	14.4	28.0	10.4	20.6	8.8	16.0	1.6	3.0	11.0	13.2	4.8	9.0	2.8	13.0	8.6	13.6	1.6	11.0	8.0	15.6	
19	9.6	24.8	15.8	25.0	15.4	28.4	6.8	21.0	9.2	15.8	3.6	2.2	5.6	11.2	4.6	11.8	1.2	15.6	8.6	13.6	1.6	11.0	8.0	15.6	
20	11.4	21.0	13.4	22.0	13.4	22.0	12.4	22.8	10.6	19.8	4.0	2.2	5.6	11.2	4.6	11.8	1.2	15.6	8.6	13.6	1.6	11.0	8.0	15.6	
21	10.8	26.6	11.0	21.2	12.4	25.2	12.4	26.0	8.4	15.2	1.0	5.6	6.4	9.8	1.6	9.0	3.0	20.2	2.8	21.0	6.6	13.2	9.2	26.8	
22	15.6	29.8	11.0	11.2	12.4	25.0	10.0	21.0	8.4	15.0	6.1	13.8	7.8	11.2	2.0	3.2	6.8	20.0	4.6	20.4	6.2	14.6	13.2	29.2	
23	15.6	29.8	13.0	20.0	14.4	25.8	12.4	19.8	4.4	15.0	6.1	9.8	—	7.6	1.2	8.8	6.6	18.0	6.6	21.8	4.8	15.2	13.8	28.6	
24	15.6	29.8	13.0	20.0	14.4	25.8	12.4	19.8	4.4	15.0	6.1	9.8	—	7.6	1.2	8.8	6.6	18.0	6.6	21.8	4.8	15.2	13.8	28.6	
25	15.6	29.8	13.0	20.0	14.4	25.8	12.4	19.8	4.4	15.0	6.1	9.8	—	7.6	1.2	8.8	6.6	18.0	6.6	21.8	4.8	15.2	13.8	28.6	
26	13.0	27.2	19.6	27.2	13.0	22.8	10.0	20.0	6.4	13.0	9.8	13.2	2.0	10.0	3.0	8.8	9.2	15.6	7.6	20.0	2.4	19.8	14.0	20.2	
27	14.0	28.0	17.4	22.6	14.8	21.4	6.6	18.4	4.6	15.6	6.0	11.2	6.6	9.8	0.4	8.4	6.0	20.0	6.8	15.8	6.8	13.8	13.8	25.4	
28	16.6	23.8	12.4	22.6	12.8	20.0	8.8	17.8	7.0	15.2	5.0	18.6	10.2	13.8	11.4	11.4	4.4	7.0	13.2	8.0	13.6	11.0	22.0	25.0	
29	18.4	25.0	11.2	25.8	16.4	19.0	5.6	19.0	7.4	14.4	7.0	9.8	9.6	9.6	—	8.2	2.0	7.4	16.2	9.6	19.2	14.0	22.4	23.4	
30	15.8	22.4	13.0	26.0	15.4	22.2	1.6	18.6	0.8	7.0	7.8	4.8	3.8	6.8	—	4.0	2.0	6.0	14.6	9.4	17.0	13.2	17.2	17.2	
31	—	—	15.0	24.6	13.0	23.4	—	—	1.0	9.8	—	—	2.0	7.0	—	1.6	14.0	—	6.8	14.0	—	—	12.4	19.6	
Moyenne	11.68	21.62	15.29	26.13	13.95	24.92	12.32	21.77	7.57	15.05	5.22	11.86	9.70	8.06	1.92	8.90	2.41	12.82	4.80	14.87	4.00	14.98	9.72	20.96	

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques de Sallebeuf (Chen Vaquey) (Suite).

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques de Lussac.

## Observations thermométriques de Lussac. (Suite).

Date	Juin 1902		Juillet 1902		Août 1902		Septembre 1902		Octobre 1902		Novembre 1902		Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903		
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	
1	10.3	18.0	13.5	27.5	14.0	27.5	11.3	28.4	5.0	12.0	0.5	15.8	4.2	11.8	4.6	7.8	4.2	10.5	2.0	15.8	3.7	17.4	6.9	16.2	
2	9.7	22.0	13.2	28.6	12.8	26.7	16.0	29.0	6.9	13.0	—	12.1	7.9	12.1	5.9	11.4	0.9	7.2	3.4	13.5	4.7	13.7	5.2	18.7	
3	14.6	22.2	13.7	28.7	9.8	24.8	18.2	29.8	3.2	17.0	2.5	15.8	6.6	11.2	8.2	11.4	—	1.3	7.6	3.0	12.5	5.2	14.3	10.5	19.8
4	10.3	25.6	12.7	30.8	19.7	31.6	15.8	31.5	21.0	7.8	14.2	6.2	30.0	3.6	4.1	8.4	15.1	—	2.2	4.1	5.6	15.2	11.2	18.1	
5	11.0	26.0	13.6	34.0	19.0	35.0	13.2	32.1	9.0	17.5	5.8	21.6	—	1.1	1.5	7.0	15.6	—	1.4	10.5	9.5	13.4	7.8	17.5	
6	9.5	22.7	18.0	32.0	15.2	33.8	11.9	32.5	6.3	14.0	11.5	19.8	—	6.1	3.0	5.9	13.3	0.5	13.0	7.2	11.6	2.8	17.7		
7	9.5	21.5	17.8	32.2	17.2	37.0	11.0	24.2	4.7	17.4	9.9	19.2	—	8.3	0.2	7.0	13.5	3.4	11.2	4.2	12.1	4.8	22.1		
8	10.0	19.0	19.4	35.8	17.0	35.2	14.1	27.1	41.0	33.0	6.0	19.6	—	8.4	3.2	7.2	14.0	2.5	13.3	1.7	10.6	8.8	17.1		
9	8.0	18.3	19.4	35.3	12.6	27.3	15.2	23.0	15.5	22.2	9.9	13.8	—	4.6	5.6	8.2	15.0	2.2	15.3	4.7	10.0	8.8	17.1		
10	8.0	19.4	19.2	28.2	10.8	23.4	13.4	27.8	10.6	22.0	3.4	10.2	—	1.5	5.4	9.8	16.5	3.5	15.4	4.4	10.0	2.9	16.1		
11	9.5	21.4	13.0	25.5	11.4	23.5	14.0	25.5	10.6	19.3	7.6	18.0	—	3.7	13.1	5.9	10.1	2.0	15.2	0.2	12.8	1.7	16.3		
12	11.0	21.2	10.0	28.5	12.3	25.8	15.3	21.9	10.5	18.5	12.2	18.2	—	6.2	13.1	2.5	4.3	0.4	14.4	1.4	13.6	1.6	15.6		
13	10.0	19.2	14.0	34.4	9.8	27.5	13.6	21.0	5.0	19.0	7.9	17.7	—	6.5	11.1	5.0	1.7	1.9	12.2	4.9	18.0	3.4	16.4		
14	7.5	18.6	19.2	34.7	10.0	28.2	7.9	22.0	4.2	17.5	4.0	16.7	—	3.7	11.1	4.8	1.0	0.2	11.4	5.9	17.8	1.2	16.5		
15	6.8	17.2	18.7	29.6	16.8	30.4	10.9	22.3	7.7	19.0	4.2	9.6	—	4.8	10.0	—	0.3	2.5	7.6	5.4	18.0	—	9.4		
16	7.0	17.8	16.7	27.8	15.2	25.7	10.8	22.0	9.0	18.5	7.9	10.0	—	2.3	10.8	6.5	6.0	4.7	10.1	3.5	12.3	1.4	11.5		
17	7.4	30.8	16.7	26.7	11.2	25.4	12.2	21.9	5.2	15.8	3.0	7.1	—	9.7	13.8	4.9	9.6	—	1.0	3.6	—	1.0	11.6		
18	8.0	23.4	13.4	27.5	8.9	35.0	9.4	25.8	7.5	17.2	1.4	2.5	—	10.8	23.2	5.9	10.0	1.0	12.5	1.9	11.5	—	7.8		
19	10.6	28.0	15.4	28.0	12.2	32.2	7.1	33.8	7.5	16.6	—	5.0	24.6	5.6	11.2	5.2	12.0	0.2	16.3	1.0	14.6	—	1.8		
20	11.3	21.5	13.6	22.5	14.8	26.8	8.5	28.1	9.7	19.5	6.0	4.1	—	5.2	10.3	4.9	10.1	0.8	16.4	1.5	17.6	0.5	20.0		
21	13.6	23.2	11.4	21.0	11.2	26.0	13.1	30.0	13.3	20.2	—	1.0	6.5	6.6	9.0	1.3	9.5	5.4	19.6	4.4	22.0	6.2	13.3		
22	10.0	28.6	8.8	22.8	11.3	29.0	13.5	29.5	7.3	17.2	—	0.5	7.3	7.8	11.5	—	2.8	3.1	8.2	19.5	6.9	21.4	5.7	11.8	
23	14.7	32.0	9.0	26.5	12.9	31.0	15.5	22.5	6.5	16.4	5.7	12.2	—	0.4	9.1	0.4	9.5	6.4	15.8	6.9	22.0	5.1	11.8		
24	15.8	29.6	12.8	22.4	13.4	29.0	11.9	22.0	5.0	15.8	6.6	10.1	—	1.8	6.0	0.5	10.0	4.5	15.0	8.8	19.4	2.7	12.9		
25	17.0	32.5	12.2	28.2	13.9	23.0	13.2	25.8	1.4	14.8	8.2	12.0	—	4.0	7.7	0.6	3.9	13.3	10.4	22.1	4.0	15.4	18.2		
26	15.5	30.2	19.7	30.4	15.2	25.8	10.9	21.5	—	1.3	13.2	9.6	13.6	—	4.4	9.6	—	1.2	10.0	7.7	16.2	8.7	21.2		
27	13.8	31.0	17.0	28.4	9.4	27.3	11.8	22.0	2.9	15.3	4.7	11.6	—	6.2	10.0	—	1.5	14.6	9.8	10.0	7.7	14.3	4.1		
28	12.8	26.5	10.0	28.4	13.5	23.0	9.5	30.0	6.4	15.5	5.6	12.3	—	7.5	10.0	—	1.2	13.3	10.8	15.3	6.4	15.0	9.3		
29	12.2	26.8	10.4	27.8	10.9	21.9	7.0	19.5	6.2	14.6	7.4	10.0	—	7.5	10.0	—	1.2	13.3	10.8	15.3	6.4	15.0	9.3		
30	16.0	27.3	12.7	30.7	10.5	24.0	3.0	15.0	0.8	10.0	8.0	10.0	—	2.9	6.7	—	3.0	1.6	—	—	—	—	—		
31	—	—	13.1	25.3	8.3	26.0	—	—	0.7	12.8	—	—	—	3.6	8.0	—	2.0	10.1	—	—	—	—	—		
Moyenne	11.05	23.72	14.35	28.52	12.48	27.67	11.96	23.93	6.65	16.74	4.90	15.34	7.69	8.38	2.18	9.46	9.74	13.51	4.38	15.62	3.79	15.96	10.10	22.25	



COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

Observations thermométriques de Saint-Émilion.

Jours	Juin 1902		Juillet 1902		Août 1902		Septembre 1902		Octobre 1902		Novembre 1902	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	11,2	16,8	14,2	27,8	15,4	25,5	15,7	29,0	5,3	11,5	2,3	15,8
2	10,2	26,2	14,5	28,5	13,2	25,3	18,5	21,5	7,2	14,2	1,2	14,0
3	15,9	29,8	15,0	28,3	10,3	21,5	18,2	28,5	5,2	17,8	3,2	16,0
4	11,0	26,6	12,2	20,3	11,5	21,3	15,3	23,0	9,2	14,5	8,0	20,0
5	11,2	24,0	16,5	24,8	16,0	29,2	22,2	22,2	10,0	16,8	21,0	21,0
6	10,0	21,8	18,5	31,2	10,8	33,4	12,0	22,0	7,8	13,2	14,0	20,2
7	10,4	22,2	18,0	31,8	17,2	26,5	11,2	24,0	6,7	17,8	18,0	16,0
8	10,2	18,4	19,5	35,4	17,4	24,5	15,0	27,0	10,5	20,3	7,0	13,5
9	8,5	18,8	19,2	34,5	11,3	27,5	15,5	24,0	12,5	21,8	10,3	14,8
10	8,7	19,4	13,5	27,0	11,2	27,0	13,2	27,8	12,0	22,5	5,3	11,8
11	10,7	21,4	13,2	25,4	10,8	22,5	14,2	25,2	12,3	19,2	8,3	18,5
12	11,7	21,0	11,2	29,3	12,0	23,2	15,0	22,0	12,8	18,0	13,0	17,0
13	10,5	19,5	15,5	33,2	12,4	24,8	13,0	20,2	12,5	18,8	13,5	18,0
14	7,6	19,7	20,2	25,5	11,2	26,2	8,7	21,0	6,0	18,3	5,7	13,4
15	7,8	17,0	19,2	29,0	11,0	30,2	11,0	22,2	9,0	19,2	3,8	12,8
16	7,5	17,3	17,0	27,2	12,5	35,0	11,4	22,8	13,0	16,3	8,5	10,8
17	8,4	19,2	16,7	25,8	15,2	27,3	12,8	21,5	6,8	15,8	3,7	9,2
18	8,5	23,4	14,2	26,0	14,2	31,3	9,8	23,5	9,0	17,2	2,0	5,7
19	12,5	27,2	16,0	26,2	13,3	31,5	8,0	24,2	10,5	17,5	4,5	3,8
20	11,1	22,5	18,0	23,0	16,2	23,5	8,8	27,5	10,8	19,8	5,2	1,5
21	11,5	22,8	12,8	21,0	13,2	23,7	12,8	28,2	11,0	21,0	1,0	6,8
22	10,7	28,3	0,8	22,5	11,5	29,0	14,0	28,5	8,8	16,8	0,5	7,8
23	15,0	31,4	10,0	25,8	13,0	31,2	16,4	21,5	15,4	7,0	14,0	10,0
24	16,6	32,8	13,6	22,0	13,8	29,0	12,8	22,3	5,3	15,8	7,2	10,5
25	17,5	32,8	13,6	22,0	13,2	23,5	12,5	20,5	3,2	15,0	9,0	12,5
26	16,0	26,5	20,0	29,5	12,2	25,2	11,5	21,8	9,8	12,2	10,2	13,5
27	15,8	30,4	17,5	25,5	10,5	26,2	11,2	20,8	4,7	16,2	6,0	11,2
28	18,5	36,2	11,3	26,0	14,2	30,2	9,5	19,5	7,5	16,0	6,5	12,5
29	13,5	25,8	10,5	27,5	15,5	23,5	6,0	15,5	6,5	15,8	8,2	14,0
30	16,8	25,2	13,8	31,0	15,0	24,0	2,5	10,3	1,5	13,0	8,5	11,0
31	»	»	15,2	27,2	12,8	25,3	»	»	1,8	12,0	»	»
Moyenne	11,83	23,76	15,10	26,25	15,48	27,34	12,33	25,43	8,03	16,85	6,32	12,70

COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

Observations thermométriques de Saint-Émilion (Suite).

	Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	2,2	8,2	5,5	10,8	3,0	16,2	3,0	17,5	7,3	15,5
2	6,5	19,8	6,5	14,8	0,8	7,3	3,2	13,8	8,0	12,8
3	9,0	14,5	9,0	11,5	2,3	7,5	2,7	12,6	11,3	10,2
4	6,2	15,2	1,3	11,3	6,2	14,8	3,2	13,5	10,0	19,0
5	8,2	14,8	1,3	10,7	9,3	14,8	8,5	17,0	9,2	18,8
6	7,5	13,3	2,0	12,8	7,3	11,2	3,8	17,2	8,8	17,2
7	5,5	6,8	4,0	11,2	4,3	11,8	4,5	21,5	8,5	20,5
8	7,7	13,2	3,8	14,0	2,0	10,2	9,0	16,5	9,5	19,2
9	8,7	13,8	3,8	14,0	2,0	10,2	2,7	15,0	8,2	18,0
10	10,7	16,4	4,5	15,3	1,5	9,8	2,9	16,0	8,5	19,0
11	6,2	11,5	2,3	13,0	1,4	13,5	4,3	17,8	7,0	16,5
12	5,0	12,5	3,0	8,0	1,5	14,5	1,5	17,5	6,2	16,6
13	7,8	11,2	5,2	3,8	1,2	11,2	5,0	17,7	5,8	17,5
14	5,3	10,3	5,3	1,2	1,8	10,3	6,7	18,0	2,5	16,2
15	9,5	10,2	9,5	9,7	2,5	7,5	6,4	14,2	1,2	16,8
16	11,8	5,7	6,0	4,5	9,5	6,0	12,2	4,6	11,5	18,5
17	10,5	13,8	5,5	9,5	2,2	10,0	2,0	13,2	3,0	11,5
18	11,3	13,2	6,2	10,0	2,5	15,5	1,2	14,5	1,5	16,5
19	3,2	11,2	6,0	12,0	10,0	1,5	12,5	9,0	1,2	12,6
20	6,2	10,2	11,0	1,0	10,0	2,0	17,0	1,3	19,8	10,5
21	2,0	9,2	2,0	5,5	10,0	18,8	4,8	21,4	7,0	12,8
22	8,2	12,0	3,0	5,3	8,3	19,2	7,2	21,0	6,2	14,0
23	1,2	9,7	1,2	9,2	3,0	13,0	7,7	21,5	5,3	11,5
24	10,2	3,0	10,2	3,0	13,0	8,8	19,0	3,5	13,3	16,2
25	6,2	12,5	10,5	5,8	12,5	10,5	22,5	2,5	14,5	16,0
26	1,0	8,0	5,8	12,8	9,0	20,5	4,2	21,2	15,5	32,6
27	2,8	10,5	9,2	13,8	9,0	20,5	4,2	21,2	14,0	17,5
28	1,2	14,5	8,2	19,5	7,5	14,0	7,8	14,0	8,2	19,5
29	7,2	10,5	3,5	14,0	10,8	15,0	7,7	15,0	47,5	35,8
30	7,8	9,8	2,0	9,5	»	»	»	16,8	10,0	20,2
31	8,7	8,5	4,0	6,0	»	»	»	5,5	15,0	19,2
Moyenne	5,94	10,11	5,06	13,24	5,22	15,31	6,23	15,77	10,50	21,98

COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

Observations thermométriques de Château d'Yquem.

Dates	Juin 1902		Juillet 1902		Août 1902		Septembre 1902		Octobre 1902		Novembre 1902	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	11,7	14,8	14,9	28,0	16,0	24,0	16,0	28,6	3,5	12,0	1,0	18,0
2	9,8	24,5	13,5	27,3	15,2	24,7	17,8	31,8	6,4	15,0	1,0	13,0
3	15,0	24,0	14,5	27,5	10,2	27,3	17,8	28,0	2,4	16,7	0,0	18,0
4	12,0	23,5	14,0	30,0	11,0	31,5	16,5	21,5	9,5	15,0	4,0	20,0
5	12,2	24,0	17,0	33,0	16,0	28,0	13,0	22,0	10,3	18,0	11,0	21,0
6	10,0	23,0	19,5	31,0	16,5	33,0	12,0	23,0	8,5	16,0	10,5	20,0
7	9,4	22,7	18,0	30,6	17,0	26,0	12,0	23,0	4,7	17,5	10,0	14,0
8	11,0	18,5	18,8	34,0	17,8	24,0	15,0	26,8	11,5	22,8	7,0	15,0
9	10,0	16,0	18,8	34,0	13,0	25,0	16,0	25,0	14,0	23,0	10,0	10,0
10	9,0	18,5	19,6	27,0	11,0	28,0	14,0	27,5	11,2	23,0	2,5	11,0
11	10,0	20,0	13,0	23,0	11,0	21,0	13,8	26,0	11,0	19,5	7,0	19,3
12	12,0	23,0	11,2	26,1	13,0	23,8	16,6	22,0	12,6	18,0	11,5	18,0
13	10,6	18,9	15,0	33,0	11,5	25,0	14,5	20,0	5,2	18,7	8,5	16,5
14	8,0	18,0	19,0	33,0	12,0	26,0	8,0	21,0	5,0	18,8	6,0	15,5
15	8,0	17,5	18,5	27,0	10,5	28,5	11,0	21,5	7,0	19,5	5,9	10,3
16	7,6	17,0	16,5	25,0	10,5	37,0	10,0	22,5	12,7	17,0	8,0	18,0
17	10,0	20,5	16,7	26,0	13,8	27,8	12,5	22,0	7,0	17,0	4,0	7,7
18	8,7	21,5	14,3	24,0	12,0	34,5	8,5	22,0	9,5	16,8	2,2	3,0
19	9,2	28,0	15,5	24,0	16,0	31,0	6,8	23,0	8,0	18,0	— 2,5	3,5
20	11,0	22,0	12,3	23,0	16,0	26,0	9,0	27,0	12,0	21,3	— 4,6	3,0
21	11,5	23,0	13,0	20,8	12,0	24,3	12,3	27,0	14,5	21,2	— 2,0	6,8
22	10,5	26,7	9,5	23,0	11,5	27,0	12,0	28,5	9,0	16,0	2,0	10,2
23	15,0	30,4	9,0	24,5	13,2	30,0	16,3	22,0	9,2	15,1	8,0	15,0
24	16,7	32,0	14,0	22,0	14,0	28,9	12,5	21,0	5,0	14,3	5,0	11,0
25	16,0	31,0	13,0	28,0	14,5	24,0	11,7	21,0	2,2	15,0	8,3	12,0
26	14,8	27,0	20,0	29,0	14,0	24,0	11,0	20,8	— 1,0	11,0	9,3	18,0
27	13,0	27,3	18,0	24,0	13,5	25,0	11,0	19,0	4,0	16,0	6,8	18,0
28	17,0	23,0	11,0	24,5	12,7	31,0	9,0	18,0	7,5	15,0	3,8	18,0
29	12,7	26,0	11,2	26,0	16,0	20,0	6,0	15,0	8,8	14,2	8,0	10,0
30	16,5	27,0	13,0	29,5	15,5	23,0	1,0	15,0	0,0	7,0	8,0	12,5
31	"	"	15,4	27,7	13,0	26,0	"	"	0,0	11,0	"	"
Moyenne	11,63	22,98	15,09	27,27	13,55	26,95	12,12	23,05	7,46	16,75	5,27	12,61

COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

**Observations thermométriques de Château d'Yquem (Suite).**

Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903	
minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
0,5	13,0	2,2	9,0	6,0	10,0	1,0	17,0	1,3	17,5	7,4	17,8
8,8	15,0	7,5	13,0	0,2	6,2	3,5	12,8	7,5	13,0	6,5	17,8
6,7	12,0	8,8	13,0	- 1,5	8,0	6,2	13,3	3,0	13,8	11,0	20,0
4,3	5,0	9,0	17,0	- 2,5	10,0	5,5	15,2	2,3	16,0	10,0	19,5
- 6,0	- 1,0	4,5	16,0	- 3,7	9,0	8,5	14,7	8,0	17,0	9,5	19,0
- 6,0	- 3,0	2,5	16,0	- 1,0	11,3	7,3	12,0	2,0	17,0	8,0	18,3
- 9,0	- 0,2	5,0	14,0	1,0	16,5	1,5	13,0	3,3	21,8	5,0	21,0
- 8,8	2,0	7,5	14,5	0,0	14,0	1,0	10,2	7,8	16,0	9,0	20,4
- 4,0	2,8	8,5	15,2	0,0	16,5	- 1,0	10,3	3,0	15,0	6,8	18,2
1,8	4,0	8,0	17,0	0,0	14,0	0,6	9,8	2,8	14,9	8,0	19,0
3,0	12,0	6,0	10,0	- 1,0	13,0	0,2	12,0	2,0	17,0	6,2	19,0
5,0	12,0	3,0	4,0	- 2,3	13,8	- 1,5	16,5	3,0	18,0	6,5	16,4
7,0	12,8	- 4,2	- 2,0	3,0	13,8	2,0	18,0	5,5	15,0	5,5	18,0
8,0	10,0	- 4,0	- 1,0	- 1,0	10,0	3,8	17,0	3,8	14,0	4,5	17,2
- 0,5	10,0	- 9,0	0,0	- 2,5	9,5	4,0	14,7	0,5	17,0	6,2	18,5
0,6	12,0	- 6,2	7,0	1,8	9,5	6,0	13,0	3,0	13,5	8,4	19,0
10,0	15,5	2,8	10,2	- 1,5	9,5	3,0	15,0	- 0,6	10,3	7,4	17,0
11,6	13,5	7,0	10,0	- 3,0	11,5	9,5	15,0	- 1,4	11,5	9,0	17,0
5,5	11,8	4,0	13,0	- 2,6	17,0	- 1,0	13,0	- 1,8	14,5	6,0	22,0
6,0	11,0	3,0	10,0	- 2,8	17,0	0,5	16,0	0,0	21,0	13,2	25,0
7,0	10,0	1,0	11,0	1,3	19,8	1,0	21,5	7,0	15,7	8,5	25,0
7,0	11,5	- 2,2	6,0	6,0	23,0	3,2	21,0	6,5	15,0	12,0	28,4
0,0	8,5	- 2,0	9,0	7,5	15,5	5,0	22,5	5,4	15,2	12,0	29,2
- 2,0	6,0	- 2,5	10,0	- 0,3	14,0	8,2	19,0	3,5	12,0	11,0	29,3
2,2	7,0	0,0	7,0	5,5	15,0	9,0	22,0	3,9	15,5	16,8	30,8
0,8	10,0	- 4,0	8,0	9,3	17,0	8,0	21,0	1,3	21,0	16,0	30,0
7,0	10,3	- 1,0	14,0	8,8	20,5	7,0	13,7	7,0	15,0	16,0	25,7
7,0	10,0	- 1,0	14,0	11,8	20,5	7,0	17,0	9,2	21,0	15,2	24,8
7,0	10,0	- 2,0	10,0	»	»	6,5	17,0	10,0	20,0	13,7	25,0
2,0	7,0	- 3,8	3,0	»	»	3,0	15,0	8,8	19,0	13,6	20,4
1,0	9,0	- 3,5	13,0	»	»	8,0	16,0	»	»	12,0	21,0
2,53	8,69	1,45	10,13	1,30	13,87	4,08	15,62	3,92	16,11	9,71	21,60

# COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques de Budos.

Dates.	Juin 1902		Juillet 1902		Août 1902		Septembre 1902		Octobre 1902		Novembre 1902	
	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
1	11,0	15,8	13,2	28,1	14,7	24,4	12,1	29,8	0,4	12,0	0,4	13,5
2	8,0	24,2	11,9	29,0	13,0	26,3	14,3	32,8	5,0	15,7	— 1,5	13,4
3	12,0	24,0	12,1	28,9	6,7	24,5	15,8	28,7	1,0	17,7	— 2,5	16,5
4	7,6	24,4	9,1	30,8	6,6	31,6	16,6	20,8	9,8	15,3	1,0	21,1
5	8,4	25,7	13,6	33,8	14,0	29,0	12,0	22,3	10,7	19,0	7,0	21,6
6	6,5	23,5	15,2	32,0	14,4	33,2	10,0	23,8	5,9	16,7	7,3	19,8
7	6,7	23,0	18,0	32,5	15,7	27,2	7,3	24,1	3,5	18,2	9,9	14,6
8	11,0	19,6	17,6	34,8	17,6	24,3	13,4	27,6	11,4	23,6	4,9	15,0
9	10,0	16,0	18,8	35,2	10,8	25,0	15,8	25,8	13,8	24,0	10,0	14,9
10	6,5	20,2	19,8	27,6	7,0	28,0	13,5	28,5	6,3	23,7	— 0,9	12,1
11	9,7	21,0	10,8	24,7	6,6	23,0	10,7	26,2	7,0	20,4	4,7	19,9
12	9,2	24,5	7,8	28,0	12,1	25,7	15,6	22,0	12,8	19,3	10,0	17,0
13	9,9	19,0	13,0	34,3	8,8	25,6	14,3	21,6	5,1	18,3	6,7	17,2
14	7,5	18,0	18,2	34,6	7,7	26,2	6,0	22,1	0,4	19,0	2,1	16,5
15	7,1	17,6	18,0	28,5	7,7	29,5	7,3	22,0	7,0	19,9	5,2	9,3
16	7,0	17,3	16,7	25,1	12,5	36,7	6,0	23,0	11,6	17,0	7,8	12,5
17	9,9	21,2	16,8	27,4	14,3	28,4	9,8	22,2	4,2	16,5	4,0	6,5
18	5,6	22,7	12,6	24,4	8,1	35,0	6,0	23,2	8,0	16,7	— 0,3	4,3
19	7,7	28,5	15,6	25,0	11,7	32,9	6,3	24,0	6,3	18,8	— 1,4	4,6
20	10,0	22,5	10,5	23,6	16,3	26,5	4,6	27,8	8,0	20,0	— 7,6	3,6
21	10,4	23,7	13,4	23,2	10,0	25,7	8,3	28,4	12,6	22,0	— 3,0	7,3
22	5,4	28,0	6,6	23,5	7,6	28,5	8,3	29,6	7,2	18,2	— 1,0	10,1
23	10,6	31,3	5,5	25,2	10,2	31,0	13,0	22,0	4,3	17,0	6,0	14,8
24	10,8	32,1	13,9	23,2	11,4	29,4	10,8	21,4	— 0,1	15,5	3,5	11,0
25	14,5	31,6	10,9	29,0	14,9	23,7	11,0	20,7	— 2,6	16,0	8,1	12,2
26	12,3	27,3	16,4	31,3	12,1	24,3	6,8	22,0	— 1,9	12,1	9,8	13,5
27	10,7	28,0	17,6	23,6	8,0	26,2	8,8	20,5	— 0,3	17,1	4,1	14,2
28	15,8	23,1	7,8	24,9	10,0	30,9	4,0	19,5	4,0	16,3	1,9	12,9
29	12,6	27,4	6,5	26,8	15,3	19,4	4,4	16,9	4,1	15,5	6,6	10,0
30	15,7	28,0	7,1	30,0	15,7	23,4	0,1	16,0	— 0,9	9,5	7,8	13,0
31	»	»	11,8	26,3	9,7	26,1	»	»	— 1,5	12,2	»	»
Moyenne	9,67	23,64	13,12	28,20	11,33	27,47	9,76	23,84	5,26	17,46	3,67	13,19

# COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DE LA GIRONDE

## Observations thermométriques de Budos (Suite).

Décembre 1902		Janvier 1903		Février 1903		Mars 1903		Avril 1903		Mai 1903	
minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima	minima	maxima
0,9	12,9	1,0	9,6	4,1	10,2	- 0,3	17,1	- 1,6	19,1	7,1	16,6
8,1	14,8	5,8	13,1	0,8	7,3	2,0	13,5	7,6	13,6	5,1	17,6
6,4	13,0	7,3	13,0	- 4,7	8,2	7,5	13,0	0,8	13,9	10,6	19,9
2,0	6,7	6,6	17,1	- 6,1	10,5	2,8	15,5	- 2,0	16,0	8,4	19,7
- 6,2	1,6	1,8	17,5	- 5,6	9,6	8,7	14,6	8,5	17,4	9,5	19,7
- 5,8	- 2,7	- 2,8	16,3	- 3,8	15,1	7,8	12,5	0,6	18,6	4,4	18,4
- 10,0	0,4	1,9	14,8	- 3,0	16,6	- 2,9	12,7	- 2,2	22,4	1,2	20,6
- 12,8	2,8	2,5	15,0	- 3,3	14,8	- 0,5	11,1	5,3	16,9	4,5	18,0
- 5,0	3,2	7,5	15,3	- 3,3	17,0	- 4,3	11,4	- 2,3	16,0	4,3	18,6
0,9	5,0	5,2	15,4	- 1,2	15,0	- 0,6	9,6	- 3,6	16,0	6,3	18,6
3,8	12,1	5,8	10,6	1,4	14,3	- 2,8	13,1	- 4,5	18,7	5,1	18,3
4,7	12,6	3,0	4,7	- 3,8	15,0	- 4,3	16,6	- 1,5	19,0	4,0	16,6
2,6	12,8	- 5,1	- 1,2	3,5	6,6	- 2,5	20,0	1,2	16,3	2,5	17,7
8,7	10,6	- 3,8	- 0,7	- 4,2	11,3	0,1	18,2	- 0,8	14,8	1,5	18,0
- 1,2	10,6	- 12,2	0,9	- 6,1	10,8	3,1	16,0	- 5,1	17,8	3,0	19,0
- 0,7	12,6	- 9,0	7,8	0,0	10,3	3,0	13,0	0,2	13,3	6,8	19,2
10,0	15,1	1,8	10,6	- 2,8	10,3	- 2,0	15,1	- 3,3	11,3	4,6	17,6
11,4	13,6	6,4	10,3	- 6,8	12,4	7,0	15,0	- 8,0	12,2	8,0	17,6
1,2	12,0	3,0	13,4	- 8,0	18,4	- 3,6	14,5	- 2,2	15,1	2,4	22,8
3,2	11,1	2,2	9,7	- 7,0	17,6	- 4,2	16,6	0,1	21,2	11,8	25,8
7,0	10,7	- 2,6	11,3	- 2,5	21,8	- 2,5	22,9	7,1	15,4	5,5	26,4
7,4	11,7	- 4,8	2,9	3,7	23,7	- 0,8	22,2	6,1	15,8	7,0	29,6
- 1,3	9,5	- 2,5	9,6	2,4	15,7	3,0	23,3	4,9	12,8	8,4	29,8
- 2,0	5,6	- 4,6	10,5	- 2,9	14,7	6,7	19,9	- 2,8	12,6	11,0	30,3
0,6	8,6	- 3,3	9,1	- 1,0	15,4	4,0	23,0	1,4	15,5	15,6	32,0
- 2,0	10,6	- 5,0	9,0	8,0	17,0	6,7	21,8	- 1,8	21,7	13,3	30,9
6,8	10,5	- 6,2	15,2	1,9	21,4	7,0	14,0	7,3	14,8	15,9	26,5
6,5	10,6	- 5,2	15,3	9,8	15,8	6,6	16,6	7,7	21,1	15,1	25,4
7,0	11,0	- 1,9	10,2	"	"	4,6	17,3	9,9	20,3	12,4	26,0
3,4	7,6	- 4,5	5,4	"	"	- 0,5	15,3	8,5	19,4	13,8	17,0
- 0,2	9,3	- 5,1	13,5	"	"	5,9	16,9	"	"	11,6	21,7
1,63	9,24	- 0,54	10,49	- 1,55	14,17	1,76	16,20	1,18	16,63	7,76	21,80

---

Bordeaux. — Impr. G. GOUNOUILHOU, 11, rue Guiraud.

---

This is a detailed topographical map of the region around Roquefort, France. The map shows the Leyré river flowing through the area, with several lakes and ponds. Key locations marked include La Reole, Roquefort, and various smaller settlements like Cap Sarrailh, La Sarrailh, and La Sarrailh. Elevation points are marked with numbers: 700, 800, 850, 888, 893, 899, 922, 959, 979, and 1000. A scale bar at the bottom indicates distances in kilometers (0 to 60). The map also shows the Leyré river and the Leyré river.

2.





I. A. R. I. 75.

IMPERIAL AGRICULTURAL RESEARCH  
INSTITUTE LIBRARY  
NEW DELHI.

[illegible]